

Universidade Federal Fluminense

FERNANDA VALENTIM DE SOUSA

**Estudo e Implementação Computacional do Método  
Assintótico Tipo Maslov Aplicado à Propagação de  
Choques para a Equação de Buckley-Leverett.**

Volta Redonda

2015

FERNANDA VALENTIM DE SOUSA

# Estudo e Implementação Computacional do Método Assintótico Tipo Maslov Aplicado à Propagação de Choques para a Equação de Buckley-Leverett.

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Modelagem Computacional em Ciência e Tecnologia da Universidade Federal Fluminense, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Modelagem Computacional em Ciência e Tecnologia. Área de Concentração: Modelagem Computacional.

Orientador:

Prof. D.Sc. Panters Rodríguez Bermúdez

Coorientador:

Prof. Ph.D. Diomar César Lobão

Prof. D.Sc. Gustavo Benitez Alvarez

Prof. D.Sc. Baldomero Valiño Alonso (Univ. de Habana, Cuba)

UNIVERSIDADE FEDERAL FLUMINENSE

Volta Redonda

2015

S725 Sousa, Fernanda Valentim de.

Estudo e implementação computacional do método assintótico tipo Maslov aplicado a propagação de choques para equação de Buckley-Leverett / Fernanda Valentim de Sousa. – Volta Redonda, 2015.

92 f. il.

Dissertação (Mestrado Modelagem Computacional) –  
Universidade Federal Fluminense.

Orientador: Panters Rodríguez Bermúdez.

Coorientador: Diomar César Lobão; Gustavo Benitez Alvarez;  
Baldomero Valiño Alonso.

1. Leis de conservação. 2. Ondas de choque. 3. Problemas de Riemann generalizado. 4. Cadeia de Hugoniot-Maslov. 5. Funções generalizadas. 6. Método assintótico. I. Bermúdez, Panters Rodríguez. II. Lobão, Diomar César. III. Alvarez, Gustavo Benitez. IV. Alonso, Baldomero Valiño. V. Título.

CDD 511

Estudo e Implementação Computacional do Método Assintótico Tipo  
Maslov Aplicado à Propagação de Choques para a Equação de  
Buckley-Leverett.

Fernanda Valentim de Sousa

Dissertação apresentada ao Programa de  
Pós-graduação em Modelagem Computacio-  
nal em Ciência e Tecnologia da Universidade  
Federal Fluminense, como requisito parcial  
para obtenção do título de Mestre em Mo-  
delagem Computacional em Ciência e Tec-  
nologia. Área de Concentração: Modelagem  
Computacional.

Aprovada por:

---

Prof. Panters Rodríguez Bermúdez , D.Sc. /  
MCCT-UFF (Presidente)

---

Prof. Tiago Araújo Neves, D.Sc. / MCCT-UFF

---

Prof. Yoisell Rodríguez Núñez, D.Sc. / MCCT-UFF

---

Profª. Ana Carolina Carius de Oliveira, D.Sc. / IFRJ

---

Profª. Ronney Arismel Mancebo Boloy, D.Sc. / CEFET-RJ

Volta Redonda, 15 de setembro de 2015.

*Ao meu querido pai.*

# Agradecimentos

A Deus, pela saúde e pela ajuda que mais ninguém pode dar. À minha família e, em especial, ao meu esposo Carlos André pelo apoio e incentivo.

À CAPES pela concessão da bolsa de estudo para a realização deste trabalho.

Ao meu orientador, professor Panters Rodríguez Bermúdez, pela confiança e estímulo para a realização deste trabalho. Aos professores Diomar César Lobão e Gustavo Benitez pela paciência e carinho desde o início desta empreitada e, mais ainda, durante a co-orientação do trabalho, com preciosas contribuições.

Ao professor Baldomero Valiño Alonso que, durante sua visita ao Brasil, me deu dicas que contribuíram substancialmente para o enriquecimento do trabalho.

Aos professores do MCCT que contribuíram direta ou indiretamente para a minha formação, e realização deste trabalho. Em especial ao professor Tiago Neves pelas grandes contribuições e pela gentileza em fornecer este template.

Aos meus colegas, companheiros de estudo, pela força e incentivo em todas as etapas do curso.

# Resumo

Os sistemas de leis de conservação tem uma grande importância na modelagem de problemas que descrevem fenômenos físicos da natureza, dentre eles o escoamento bifásico de fluidos. Para a modelagem deste fenômeno utiliza-se a equação de Buckley-Leverett (uma das possíveis equações) que, devido ao seu comportamento hiperbólico (quando as forças de capilaridade são negligenciadas), possui soluções conhecidas constituídas por sequências de ondas de choque e ondas de rarefação. Neste trabalho foi aplicado o método assintótico desenvolvido por V. P. Maslov para a equação de Buckley-Leverett num problema de Cauchy com dados iniciais de Riemann ou Riemann Generalizado, nos quais a existência de soluções do tipo onda de choque esteja garantida. Este método parte do pressuposto que a solução é conhecida sendo descrita por séries de potências. Dentre as diversas operações com séries realizadas está o processo de divisão, tendo sido criado um método para esse propósito cuja primeira aparição se deu neste trabalho. Através da aplicação numérica do método de Maslov, juntamente com a teoria das funções generalizadas de Colombeau, foram obtidas as cadeias de Hugoniot-Maslov, cujo truncamento resulta num sistema de EDO's. Para distintas condições iniciais, verificou-se a eficiência do método, comparando-o com métodos clássicos de diferenças finitas, na captação de ondas de choque que se propagam no tempo.

Palavras-chaves: leis de conservação, ondas de choque, problema de Riemann Generalizado, cadeia de Hugoniot-Maslov, funções generalizadas, método assintótico.

# Abstract

The conservation laws systems is very important in modeling problems that describe physical phenomena of nature, including the two-phase flow of fluids. To model this phenomenon using the equation Buckley-Leverett (one of possible equations) which, due to their hyperbolic behavior (when capillary forces are neglected) has known solutions consisting of shock waves sequences and wave rarefaction. In this work we applied the asymptotic method developed by VP Maslov for the Buckley-Leverett equation in a Cauchy problem with initial data or Riemann Riemann generalized, in which the existence of shock wave type solutions is guaranteed. This method assumes that the solution is known and described by power series. Among the various operations carried out series is the splitting process, having created a method for this purpose whose first appearance took place in this work. Through the application of Maslov numerical method, along with the theory of generalized functions Colombeau, strands were obtained Hugoniot-Maslov whose truncation results in a system of ODEs. For different initial conditions, it verified the efficiency of the method, comparing with classical methods of finite differences in uptake of shock waves that propagate in time.

Keywords: conservation laws, shock waves, problem Riemann generalized, chain Hugoniot-Maslov, generalized functions, asymptotic method.



# Glossário

CAPES	:	Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior
MCCT	:	Modelagem Computacional em Ciência e Tecnologia
$x$	:	variável espacial
$t$	:	variável temporal
$f = f(u)$	:	função de fluxo da lei conservativa
$H = H(x)$	:	função de Heaviside segundo Colombeau
$\delta = \delta(x)$	:	função delta de Dirac segundo Colombeau
EDO	:	Equação Diferencial Ordinária
EDP	:	Equação Diferencial Parcial
PVI	:	Problema de Valor Inicial
GRP (PRG)	:	Generalized Riemann Problem (Problema de Riemann Generalizado)
B-L	:	equação de Buckley-Leverett
$\mathcal{D}(\Omega)$	:	conjunto das funções teste
$\mathcal{D}'(\Omega)$	:	espaço das distribuições
$\mathcal{G}(\Omega)$	:	conjunto das funções generalizadas de Colombeau
$\mathcal{G}_s(\Omega)$	:	álgebra simplificada de Colombeau
$\mu$	:	razão das viscosidades

# Sumário

<b>Lista de Figuras</b>	<b>x</b>
<b>Lista de Tabelas</b>	<b>xiii</b>
<b>1 Introdução</b>	<b>14</b>
1.1 Contextualização . . . . .	14
1.2 Objetivos . . . . .	16
1.3 Organização do Trabalho . . . . .	17
<b>2 Leis de Conservação Escalares</b>	<b>19</b>
2.1 Equação de Advecção Linear . . . . .	19
2.2 Caso Não-Linear . . . . .	20
2.3 Formação de Choques . . . . .	21
2.3.1 Tempo Crítico . . . . .	21
2.4 Soluções Fracas . . . . .	22
2.5 Problema de Riemann . . . . .	23
2.5.1 Problema de Riemann Generalizado . . . . .	24
2.6 Condições de Entropia . . . . .	25
2.7 Equação de Buckley-Leverett . . . . .	26
<b>3 Funções Generalizadas</b>	<b>28</b>
3.1 Introdução às Funções Generalizadas . . . . .	28
3.2 Noções da Teoria das Distribuições . . . . .	29

3.3	Funções Generalizadas de Colombeau . . . . .	31
3.4	Álgebra Simplificada de Colombeau $\mathcal{G}_s(\Omega)$ . . . . .	32
3.4.1	Associação de Funções Generalizadas . . . . .	33
3.4.2	Conexão entre $\mathcal{G}_s(\Omega)$ e $\mathcal{D}'(\Omega)$ . . . . .	34
3.4.3	Definições e Propriedades Básicas em $\mathcal{G}_s(\Omega)$ . . . . .	34
<b>4</b>	<b>Obtenção da Cadeia de Hugoniot-Maslov para Choques na Equação de Buckley-Leverett</b>	<b>38</b>
4.1	Expansões Assintóticas em Séries de Potências . . . . .	40
4.1.1	Séries de Potências . . . . .	41
4.1.1.1	Séries que Envolvem a Função $A(t, x)$ , suas Potências e suas Derivadas . . . . .	41
4.1.1.2	Séries que Envolvem a Função $B(t, x)$ , suas Potências e suas Derivadas . . . . .	42
4.1.1.3	Séries que Envolvem as Funções $A(t, x)$ e $B(t, x)$ , suas Potências e suas Derivadas . . . . .	42
4.1.1.4	Séries que Envolvem o Coeficiente de Viscosidade . . . . .	43
4.1.1.5	Divisão de Séries . . . . .	44
4.1.2	Cadeia de Hugoniot-Maslov para a Equação de Buckley-Leverett . . . . .	46
4.2	Truncamento da Cadeia de Hugoniot-Maslov . . . . .	50
<b>5</b>	<b>Resultados Numéricos</b>	<b>52</b>
5.1	Comparação com Métodos de Diferenças Finitas . . . . .	53
5.2	Comparação com o Fluxo Aproximado por Série de Maclaurin . . . . .	65
5.3	Análise de Complexidade . . . . .	70
<b>6</b>	<b>Conclusões</b>	<b>75</b>
6.1	Conclusões . . . . .	75
6.2	Trabalhos Futuros . . . . .	76

---

<b>Referências</b>	<b>77</b>
<b>Apêndice A – Apêndice</b>	<b>79</b>
A.1 Programa Principal . . . . .	79
A.2 Cadeia Truncada . . . . .	84
A.3 Métodos Numéricos de Diferenças Finitas . . . . .	89
A.3.1 Discretização . . . . .	89
A.3.2 Aproximação de Derivadas por Diferenças Finitas . . . . .	89
A.3.3 Fórmulas para Diferenças Finitas . . . . .	89
A.3.3.1 Fórmula Progressiva . . . . .	89
A.3.3.2 Fórmula Regressiva . . . . .	90
A.3.3.3 Fórmula Central . . . . .	90
A.3.4 Erro e Ordem de Aproximação de Uma Fórmula de Diferença . . . . .	90
A.3.5 Principais Fórmulas de Diferenças para Duas Variáveis . . . . .	90
A.3.5.1 Fórmula Progressiva . . . . .	90
A.3.5.2 Fórmula Regressiva . . . . .	91
A.3.5.3 Fórmula Central . . . . .	91
A.3.6 Métodos Numéricos de Diferenças Finitas . . . . .	91
A.3.6.1 Métodos Conservativos . . . . .	92

# Lista de Figuras

2.1	<i>Linhas características para a equação de Burger's - caso I: <math>u_l &gt; u_r</math>, LeVeque[1].</i>	24
2.2	<i>Linhas características para a equação de Burger's - caso II: <math>u_l &lt; u_r</math>, LeVeque[1].</i>	24
3.1	<i>Funções generalizadas de Heaviside.</i>	35
3.2	<i>Funções generalizadas <math>\delta</math> de Dirac.</i>	36
5.1	<i>Gráfico da condição inicial do problema de Riemann.</i>	54
5.2	<i>Solução numérica em 3D do método assintótico para o problema de Riemann.</i>	54
5.3	<i>Trajetória da singularidade para o problema de Riemann.</i>	55
5.4	<i>Gráfico de profundidade para o problema de Riemann.</i>	55
5.5	<i>Perfis de onda para o problema de Riemann: iteração temporal 48.</i>	55
5.6	<i>Perfis de onda para o problema de Riemann: iteração temporal 67.</i>	55
5.7	<i>Gráfico da condição inicial do PRG - perturbação de ordem <math>10^{-2}</math>.</i>	56
5.8	<i>Solução numérica em 3D do método assintótico para o PRG - perturbação de ordem <math>10^{-2}</math>.</i>	57
5.9	<i>Trajetória da singularidade para o PRG - perturbação de ordem <math>10^{-2}</math>.</i>	57
5.10	<i>Gráfico de profundidade para o PRG - perturbação de ordem <math>10^{-2}</math>.</i>	57
5.11	<i>Perfis de onda para o PRG - perturbação de ordem <math>10^{-2}</math>: iteração temporal 48.</i>	58
5.12	<i>Perfis de onda para o PRG - perturbação de ordem <math>10^{-2}</math>: iteração temporal 67.</i>	58
5.13	<i>Gráfico da condição inicial do PRG - perturbação de ordem <math>10^{-1}</math>.</i>	59
5.14	<i>Solução numérica em 3D do método assintótico para o PRG - perturbação de ordem <math>10^{-1}</math>.</i>	59

5.15	<i>Trajectoria da singularidade para o PRG - perturbação de ordem <math>10^{-1}</math>.</i> . . . .	60
5.16	<i>Gráfico de profundidade para o PRG - perturbação de ordem <math>10^{-1}</math>.</i> . . . . .	60
5.17	<i>Perfis de onda para o PRG - perturbação de ordem <math>10^{-1}</math>: iteração temporal 48.</i> . . . . .	60
5.18	<i>Perfis de onda para o PRG - perturbação de ordem <math>10^{-1}</math>: iteração temporal 67.</i> . . . . .	60
5.19	<i>Gráfico da condição inicial para o PRG - reta e parábola.</i> . . . . .	61
5.20	<i>Solução numérica em 3D do método assintótico para o PRG - reta e parábola.</i>	61
5.21	<i>Solução numérica em 3D do método assintótico para o PRG - reta e parábola: rotação.</i> . . . . .	61
5.22	<i>Trajectoria da singularidade para o PRG - reta e parábola.</i> . . . . .	62
5.23	<i>Gráfico em profundidade para o PRG - reta e parábola.</i> . . . . .	62
5.24	<i>Perfis de Onda para o PRG - reta e parábola: iteração temporal 46.</i> . . . .	62
5.25	<i>Perfis de Onda para o PRG - reta e parábola: iteração temporal 69.</i> . . . .	62
5.26	<i>Gráfico da condição inicial para o PRG - parábolas.</i> . . . . .	63
5.27	<i>Solução numérica em 3D do método assintótico para o PRG - parábolas.</i> . .	64
5.28	<i>Gráfico da trajetória da singularidade para o PRG - parábolas.</i> . . . . .	64
5.29	<i>Gráfico de profundidade para o PRG - parábolas.</i> . . . . .	64
5.30	<i>Gráfico dos perfis de onda para o PRG - parábolas: iteração temporal 33.</i> .	65
5.31	<i>Gráfico dos perfis de onda para o PRG - parábolas: iteração temporal 67.</i> .	65
5.32	<i>Gráfico da condição inicial para o problema de Riemann - aproximação polinomial.</i> . . . . .	66
5.33	<i>Gráfico da comparação entre as trajetórias da singularidade para o problema de Riemann, <math>N=2</math>.</i> . . . . .	67
5.34	<i>Gráfico da comparação entre as trajetórias da singularidade para o problema de Riemann, <math>N=6</math>.</i> . . . . .	67
5.35	<i>Gráfico dos perfis de onda para o problema de Riemann - <math>N=2</math>: iteração temporal 78.</i> . . . . .	67

---

5.36	<i>Gráfico dos perfis de onda para o problema de Riemann - <math>N=6</math>: iteração temporal 78.</i>	67
5.37	<i>Gráfico da condição inicial para o PRG - aproximação polinomial.</i>	68
5.38	<i>Comparação das trajetórias PRG - aproximação polinomial, <math>N=6</math>.</i>	68
5.39	<i>Comparação das trajetórias PRG - aproximação polinomial, <math>N=11</math>.</i>	68
5.40	<i>Gráfico dos perfis de onda para o PRG - <math>N=6</math>: iteração temporal 78.</i>	69
5.41	<i>Gráfico dos perfis de onda para o PRG - <math>N=11</math>: iteração temporal 78.</i>	69
5.42	<i>Gráficos de complexidade dos métodos Assintótico, Lax-Wendroff, NT e Godunov para o exemplo 1.</i>	71
5.43	<i>Gráficos de complexidade dos métodos Assintótico, Lax-Wendroff, NT e Godunov para o exemplo 2.</i>	72
5.44	<i>Gráficos de complexidade dos métodos Assintótico, Lax-Wendroff, NT e Godunov para o exemplo 3.</i>	73
5.45	<i>Gráficos de complexidade dos métodos Assintótico, Lax-Wendroff, NT e Godunov para o exemplo 4.</i>	74

# Lista de Tabelas

5.1	Polinômios de complexidade dos métodos Assintótico com fluxo de B-L, Lax-Wendroff, NT e Godunov para o exemplo 1. . . . .	70
5.2	Polinômios de complexidade dos métodos Assintótico com fluxo de B-L, Lax-Wendroff, NT e Godunov para o exemplo 2. . . . .	71
5.3	Polinômios de complexidade dos métodos Assintótico com fluxo de B-L, Lax-Wendroff, NT e Godunov para o exemplo 3. . . . .	72
5.4	Polinômios de complexidade dos métodos Assintótico com fluxo de B-L, Lax-Wendroff, NT e Godunov para o exemplo 4. . . . .	73



# Capítulo 1

## Introdução

No presente capítulo serão apresentadas brevemente a justificativa para o desenvolvimento do estudo em questão, seus objetivos e as proposições feitas para a realização do mesmo. Além disso trataremos da organização do trabalho e de suas bases teóricas.

### 1.1 Contextualização

Os sistemas de Leis de Conservação tem uma grande importância na modelagem de problemas que descrevem fenômenos de transporte de fluidos em meios porosos. Problemas desta natureza apresentam um grande interesse tanto do ponto de vista energético, na recuperação avançada de petróleo, quanto ambiental, no armazenamento de gás carbônico em reservatórios [2]. Como exemplo podemos citar os casos de escoamento de fluidos em reservatórios petrolíferos após injeção de água ou de gás carbônico.

Na modelagem deste tipo de fenômeno, do ponto de vista matemático, faz-se necessário resolver um problema de Cauchy com dados iniciais constantes por partes (dados de Riemann) para um sistema hiperbólico de equações em derivadas parciais de primeira ordem, que surgem quando não se consideram termos dissipativos parabólicos de segunda ordem constituindo, assim, um problema de Riemann.

O Problema de Riemann mais simples é aquele que modela a injeção de um fluido (por exemplo, água) em um reservatório que contém apenas óleo (escoamento bifásico). Nesse caso, o problema pode ser modelado por uma equação escalar conservativa, conhecida como equação de Buckley-Leverett, que apresenta comportamento hiperbólico quando as

forças de capilaridade são negligenciadas [1]. A equação de Buckley-Leverett é apenas um dos possíveis modelos, sendo a equação de Burgers outra equação importante que permite modelar fenômenos como os supracitados. Neste trabalho, a metodologia citada foi desenvolvida para a equação de Buckley-Leverett e é distinta às usadas por [1, 3]. Exemplos para outros tipos de equações podem ser encontrados em [1, 4].

As soluções de Riemann para essas equações são bem conhecidas, constituindo sequências de ondas de choque (soluções descontínuas) e ondas de rarefação [5]. No entanto, para um problema de Riemann, considerando apenas a conservação, soluções múltiplas são possíveis e condições adicionais se fazem necessárias para selecionar a solução fisicamente correta. Tal condição de unicidade é chamada condição de entropia, palavra utilizada porque grande parcela da teoria das leis de conservação são de origem da dinâmica dos gases. Além disso, devido à propagação de descontinuidades, em geral, não há regularidade na solução, de modo que se busca a solução, mas dessa vez não no sentido clássico (imposto pelas derivadas) e sim num sentido mais fraco (formulação integral da EDP <sup>1</sup>), sendo denominadas *soluções fracas*. Devido à não linearidade da EDP e pelo fato das soluções da equação serem descontínuas, essas ditas soluções fracas são também chamadas de soluções (funções) generalizadas.

Dentre as várias teorias de funções generalizadas utilizadas, a mais conhecida é a teoria de distribuição, de Schwarz, que apresenta limitações quando o problema a ser estudado é não linear. Outras teorias de funções generalizadas mais recentes, como a teoria de Colombeau [6], permitem um melhor estudo no que se refere a sistemas de leis de conservação. Neste trabalho, será realizado um estudo baseado nos resultados de Colombeau e, posteriormente, Maslov obtendo-se um método numérico assintótico para uma lei de conservação com fluxo de Buckley-Leverett com condições iniciais do tipo Riemann e Riemann Generalizado [7].

Neste trabalho será aplicado o método assintótico de Maslov dentro do contexto das funções generalizadas de Colombeau para a obtenção da chamada cadeia de Hugoniot-Maslov para a equação de Buckley-Leverett. Esta cadeia, além de ter um valor teórico importante, nos permite, após o truncamento e resolução numérica da mesma, implementar o método de Maslov como ferramenta numérica para a captura de ondas de choque

---

<sup>1</sup>Equação diferencial parcial.

para a equação de Buckley-Leverett.

Estudos similares ao nosso, para outras equações e outros tipos de soluções singulares podem ser vistos em [8, 9].

## 1.2 Objetivos

Para um melhor desenvolvimento do trabalho, foram propostos os seguintes objetivos:

- Fazer a revisão bibliográfica da Teoria das Funções Generalizadas de Colombeau;
- Aplicar o método assintótico para encontrar as cadeias de Hugoniot-Maslov que constituem uma condição necessária para a existência de uma onda de choque como solução da equação de Buckley-Leverett;
- Resolver numericamente o sistema de EDO's <sup>2</sup> obtido à partir do truncamento da cadeia de Hugoniot-Maslov para capturar as ondas de choque no caso em que elas existem como choque simples ou puro (soluções do tipo choque que não apresentam estruturas adjacentes em sua forma);
- Utilizar o MATLAB®<sup>3</sup> com intuito de obter as soluções aproximadas para a equação de Buckley-Leverett com condições iniciais do tipo Riemann e Riemann Generalizado;
- Comparar as soluções obtidas através do método assintótico de Maslov com as soluções obtidas através de métodos clássicos de diferenças finitas;

---

<sup>2</sup>Equação diferencial ordinária.

<sup>3</sup>O MATLAB® é uma linguagem de alto nível e ambiente interativo usado por milhões de engenheiros e cientistas em todo o mundo que permite explorar e visualizar idéias e colaborar em todas as disciplinas, incluindo processamento de sinal e imagem, comunicações, sistemas de controle e finanças computacionais.

**Fonte:**<http://www.mathworks.com>

- Comparar as soluções obtidas através do método assintótico de Maslov para a equação de Buckley-Leverett com soluções obtidas através do mesmo método utilizando uma aproximação polinomial prévia da função de fluxo.

## 1.3 Organização do Trabalho

A presente pesquisa foi dividida em 6 capítulos, de acordo com seu conteúdo. O primeiro capítulo foi dedicado a especificar os objetivos e a importância da execução do trabalho.

No segundo capítulo foram apresentados os conceitos básicos sobre as leis de conservação para o caso de uma equação escalar, noções de curvas características, formação de choques e solução fraca, assim como foram apresentadas definições importantes como o problema de Riemann, condições de entropia e as principais características da Equação de Buckley-Leverett.

No capítulo 3 foram apresentados os aspectos mais importantes da Teoria das Funções Generalizadas, como o surgimento da teoria, noções da teoria das distribuições e o Teorema da Impossibilidade de Schwarz, que mostra a insuficiência da teoria para alguns casos importantes. Posteriormente foram apresentadas as características, definições e as propriedades mais relevantes da Teoria das Funções Generalizadas de Colombeau, que serviram de base para a maioria dos cálculos realizados neste trabalho.

No capítulo 4 foi feita a aplicação do método assintótico desenvolvido por Maslov para a captura de ondas de choque no problema de Riemann ou Riemann generalizado, quando estas existem. Devido à não linearidade da equação de Buckley-Leverett os cálculos necessários para a obtenção das cadeias de Hugoniot-Maslov foram realizados no contexto da teoria das funções generalizadas de Colombeau. Através da aplicação do método assintótico foi possível encontrar a cadeia de Hugoniot-Maslov cujo truncamento resulta num sistema fechado de EDO's.

No capítulo 5 houve a exposição e discussão dos resultados obtidos através de simulação numérica computacional, utilizando o método assintótico proposto com o uso

do MATLAB® em comparação com métodos clássicos de diferenças finitas (Lax-Wendroff, NT <sup>4</sup> e Godunov) e, logo após, com o próprio método assintótico para o fluxo de Buckley-Leverett desenvolvido em série de Maclaurin de segunda, sexta e décima primeira ordem. Já nesta unidade pode-se observar a eficiência do método assintótico para o fluxo de Buckley-Leverett na captação das ondas de choque.

O capítulo 6 dedicou-se às conclusões do trabalho através dos resultados obtidos, comprovando que, de fato, o método assintótico para o fluxo de Buckley-Leverett capta de forma eficiente as ondas de choque nos problemas em que elas existem. Em seguida indicamos algumas sugestões de trabalhos futuros.

No apêndice trouxemos os códigos principais utilizados na implementação computacional e, uma breve descrição dos métodos de diferenças finitas utilizados no trabalho.

---

<sup>4</sup>Nessyahu e Tadmor.

# Capítulo 2

## Leis de Conservação Escalares

Neste capítulo realizaremos uma breve introdução de alguns conceitos básicos das leis de conservação para o caso escalar. Essencialmente seguiremos a mesma exposição feita em [1]. Começamos pelo caso mais simples, o linear.

### 2.1 Equação de Advecção Linear

Consideremos a equação de advecção linear dada por

$$u_t + au_x = 0. \quad (2.1)$$

Para esta equação, o Problema de Cauchy está definido no domínio  $-\infty < x < +\infty$ ,  $t \geq 0$  juntamente com a condição inicial

$$u(0, x) = u_0(x). \quad (2.2)$$

A solução do PVI <sup>1</sup> formado por (2.1)-(2.2) é dada por:

$$u(t, x) = u_0(x - at), \quad (2.3)$$

para todo  $t \geq 0$ .

Os dados iniciais são propagados para a direita (se  $a > 0$ ) ou para a esquerda (se  $a < 0$ ) com velocidade constante  $a$ . A solução  $u(t, x)$  é constante ao longo de cada curva característica da equação. As características definem as direções preferenciais de propagação das condições iniciais para o interior do domínio e podem ser

---

<sup>1</sup>Problema de valor inicial.

definidas como curvas no plano  $(t, x)$  que satisfazem a EDO  $x'(t) = a$ ,  $x(0) = x_0$ . Para o caso da equação de advecção, as características são descritas pela equação  $x - at = x_0$ , para cada  $x_0$ , sendo retas. Aplicando a regra da cadeia e derivando a solução da equação encontrada em relação a  $t$  obtém-se que  $u$  é, de fato, constante ao longo de cada curva característica.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}u(t, x(t)) &= \frac{\partial}{\partial t}u(t, x(t)) + \frac{\partial}{\partial x}u(t, x(t))x'(t) \\ &= u_t + au_x \\ &= 0. \end{aligned} \tag{2.4}$$

## 2.2 Caso Não-Linear

Uma Lei de Conservação escalar não linear tem a forma

$$u_t + (f(u))_x = 0, \tag{2.5}$$

onde  $f(u)$  é uma função não linear de  $u$ , chamada fluxo da lei conservativa. O caso não-linear mais simples é a equação de Burger's com  $f(u) = \frac{u^2}{2}$  dada por

$$u_t + uu_x = 0. \tag{2.6}$$

Neste caso,  $f$  é uma função convexa, ver [1]. Para um tempo pequeno, a solução da equação pode ser construída ao longo das características. Como  $u$  é constante ao longo de cada característica, a inclinação  $x'(t) = u$  é constante e as características serão, novamente, linhas retas determinadas pela condição inicial.

Se os dados iniciais são suaves, então podem ser usados para determinar a solução  $u(t, x)$  para um tempo  $t$  pequeno em que as características não se cruzam: para cada  $(t, x)$  resolvemos a equação

$$x = \xi + u(0, \xi)t, \tag{2.7}$$

de modo que a solução será dada por

$$u(t, x) = u(0, \xi). \tag{2.8}$$

## 2.3 Formação de Choques

Para um tempo  $t$  grande, no entanto, a equação (2.7) pode não ter uma única solução. Isso ocorre porque as características se cruzam, como acontece se  $u_x(0, x)$  for negativa em algum ponto. Num tempo  $T_b$ , onde as características se cruzam, a função  $u(t, x)$  tem uma inclinação infinita, nesse caso a solução “quebra” e os choques são formados.

### 2.3.1 Tempo Crítico

A seguir, será determinado o tempo de quebra da onda, também conhecido como tempo crítico. Vamos supor que resolveremos a equação (2.6) com dados iniciais suaves  $u_0(x)$ . Deste modo, a solução implícita da equação será dada por

$$u(t, x) = u_0(x - ut). \quad (2.9)$$

Derivando (2.9) em relação a  $x$ , temos

$$u_x = u'_0 \cdot (1 - u_x t), \quad (2.10)$$

portanto,

$$u_x = \frac{u'_0}{1 + u'_0 t}, \quad (2.11)$$

e tem-se que a derivada  $u_x$  tende a infinito se  $u'_0 = \frac{-1}{t}$ , de maneira que o tempo crítico será dado por

$$T_b = \frac{-1}{\min u'_0}. \quad (2.12)$$

Fisicamente, as soluções das leis de conservação genericamente podem apresentar uma ou várias discontinuidades que aparecem na forma de ondas de choque. Para estudar esse tipo de fenômeno é necessário estender o conceito de solução a uma forma mais geral, denominada na literatura de soluções fracas.



## 2.4 Soluções Fracas

Devido ao fenômeno de propagação de descontinuidades, em geral, não há regularidade na solução de modo que se busca a solução não mais no sentido clássico imposto pela derivada e sim num sentido mais fraco, em forma integral, que permite considerar soluções descontínuas.

Considere-se a equação escalar conservativa em sua formulação forte (clássica):

$$u_t + (f(u))_x = 0. \quad (2.13)$$

Multiplicando (2.13) por  $\phi(t, x) \in C_0^1(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R})$  e integrando em seu domínio

$$\int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (\phi u_t + \phi (f(u))_x) dx dt = 0. \quad (2.14)$$

Integrando por partes a equação (2.14), obtém-se

$$\int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (\phi_t u + \phi_x f(u)) dx dt = - \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(0, x) u(0, x) dx, \quad (2.15)$$

que é a formulação fraca ou Lei de Conservação na forma integral.

As soluções fracas são soluções que podem ter uma ou várias descontinuidades (singularidades) ou podem ser contínuas e apresentar descontinuidades em alguma de suas derivadas (singularidades fracas). Soluções que apresentam as características citadas acima são conhecidas como *soluções singulares*.

De acordo com V.P. Maslov [7], as soluções singulares de equações hiperbólicas se apresentam na forma

$$u(t, x) = g(S(t, x), t, x), \quad (2.16)$$

onde  $g(\tau, t, x)$  é uma função escalar (ou vetorial), suave fora do ponto  $\tau = S(t, x) = 0$  e que possui uma singularidade neste ponto, e  $S(t, x)$  é uma função suave.

Nas soluções do tipo (2.16) são comuns as seguintes propriedades:

1. Elas são estruturalmente autosimilares;
2. São estruturalmente estáveis;
3. As soluções podem ser descritas mediante sistemas infinitos de EDO's.

Estes sistemas infinitos de EDO's são conhecidos na literatura como cadeias de Hugoniot-Maslov que constituem as condições necessárias para a existência das soluções singulares. Para mais detalhes ver [5].

Um tipo de problema muito estudado na teoria das leis de conservação são os problemas de Riemann, que veremos a seguir.

## 2.5 Problema de Riemann

Um problema de Riemann é constituído por uma equação diferencial parcial na forma conservativa tendo como condição inicial uma função da forma:

$$u(0, x) = \begin{cases} u_l, & x < 0 \\ u_r, & x > 0. \end{cases} \quad (2.17)$$

Para a equação de Burger's descrita em (2.6) com condições iniciais por partes, a forma da solução depende da relação entre as constantes  $u_l$  e  $u_r$ .

**Caso I.**  $u_l > u_r$ .

Neste caso, segundo Leveque [1] existe uma única solução fraca

$$u(t, x) = \begin{cases} u_l, & x < st \\ u_r, & x > st, \end{cases} \quad (2.18)$$

onde

$$s = \frac{u_l + u_r}{2}, \quad (2.19)$$

é a velocidade do choque, ou seja, a velocidade de propagação da descontinuidade. Neste caso a equação (2.6) apresenta uma solução do tipo choque.

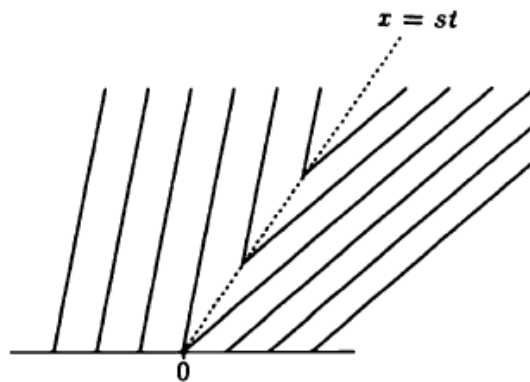


Figura 2.1: *Linhas características para a equação de Burger's - caso I:  $u_l > u_r$ , LeVeque[1].*

**Caso II.**  $u_l < u_r$ .

Neste caso, segundo Leveque [1] existem infinitas soluções fracas. Uma solução possível é a onda de rarefação

$$u(t, x) = \begin{cases} u_l, & x < u_l t \\ x/t, & u_l t \leq x \leq u_r t \\ u_r, & x > u_r t. \end{cases} \quad (2.20)$$

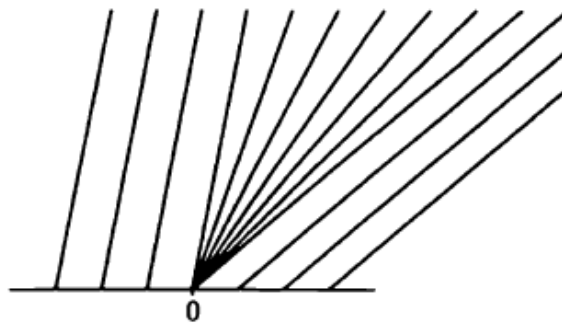


Figura 2.2: *Linhas características para a equação de Burger's - caso II:  $u_l < u_r$ , LeVeque[1].*

Para maiores detalhes ver [1, 3].

### 2.5.1 Problema de Riemann Generalizado

O problema de Cauchy dado por uma equação na forma conservativa escalar com uma condição inicial do tipo:

$$u(0, x) = \begin{cases} u_l(x), & \text{se } x < 0 \\ u_r(x), & \text{se } x \geq 0, \end{cases} \quad (2.21)$$

onde  $u_l(x)$  e  $u_r(x)$  são funções de classe  $C^\infty$  tais que  $u_l(0) \neq u_r(0)$ , é conhecido como *Problema de Riemann Generalizado*, ver [5, 10].

Admitindo soluções fracas, o PVI pode apresentar multiplicidade de soluções sendo necessárias informações adicionais para a escolha da solução mais adequada. A melhor solução é aquela que é fisicamente correta, sendo determinada pelos critérios de entropia de Rankine-Hugoniot e Oleinik, os quais serão apresentados a seguir.

## 2.6 Condições de Entropia

A seguir serão apresentados dois critérios de entropia comumente usados para a escolha da solução entrópica de leis de conservação escalares. Será feita uma breve exposição sem muitos detalhes, pois para o desenvolvimento deste trabalho partiremos da base de existência da solução entrópica tipo choque para a aplicação do método assintótico.

CRITÉRIO *versão 1*: Seja  $s$  a velocidade do choque dada pela condição de Rankine-Hugoniot [1, 4]. A solução  $u(t, x)$  é a solução entrópica, se ao longo da descontinuidade vale:

$$f'(u_l) > s > f'(u_r). \quad (2.22)$$

Se  $f$  é convexa, a condição se reduz a  $u_l < u_r$ . Do contrário, se  $f$  é côncava teremos  $u_r > u_l$ .

Uma condição mais geral foi estabelecida por Oleinik, ver [1], aplicada também para funções de fluxo escalares não-convexas.

CRITÉRIO *versão 2*: A solução  $u(t, x)$  é a solução entrópica se ao longo da descontinuidade vale a relação:

$$\frac{f(u) - f'(u_l)}{u - u_l} > s > \frac{f(u) - f'(u_r)}{u - u_r}, \quad (2.23)$$

para todo  $u$  entre  $u_l$  e  $u_r$ .

## 2.7 Equação de Buckley-Leverett

A equação de B-L <sup>2</sup> é uma lei de conservação não linear que serve para modelar o fenômeno de escoamento bifásico de fluidos imiscíveis em uma dimensão espacial em um meio poroso. Ela é dada por:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f(u)}{\partial x} = 0, \quad (2.24)$$

onde  $u$  representa a saturação de uma das fases, por exemplo “água” e  $f(u)$  é a função de fluxo dada por

$$f(u) = \frac{u^2/a}{u^2/a + (1-u)^2/b}, \quad (2.25)$$

sendo  $a$  e  $b$  as viscosidades para a água e óleo, respectivamente. Neste modelo a porosidade é considerada como sendo um e os efeitos de capilaridade e gravidade são ignorados [11, 1].

Fazendo  $\mu = \frac{a}{b}$ , que é a razão das viscosidades, temos:

$$f(u) = \frac{u^2}{u^2 + \mu(1-u)^2}. \quad (2.26)$$

Substituindo a expressão anterior na equação (2.24), obtemos a equação:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{u^2}{u^2 + \mu(1-u)^2} \right) = 0, \quad (2.27)$$

que juntamente com as condições iniciais de Riemann ou Riemann Generalizado formam o objeto de estudo deste trabalho [1].

---

<sup>2</sup>Buckley-Leverett.

Em geral, existem muitos trabalhos dedicados ao estudo das singularidades que se propagam no tempo, ver [5, 10, 3], por serem de maior interesse físico. Os três tipos de singularidade mais conhecidos são os tipo vorticial, solitóns infinitamente estreitos e ondas de choque. Nesse trabalho, serão consideradas apenas as singularidades do tipo ondas de choque.

Soluções fracas no sentido (2.14)-(2.15) são chamadas também de soluções generalizadas. Existem várias teorias de funções generalizadas comumente utilizadas na resolução de problemas físicos e da natureza. A mais conhecida é a teoria de distribuição, de Schwarz, porém apresenta limitações quando o problema a ser estudado é não linear. Outras teorias de funções generalizadas mais recentes, como a teoria de Colombeau nos permite dar um rigor matemático aos cálculos feitos nesta dissertação. No capítulo seguinte serão apresentados, brevemente, alguns conceitos básicos das funções generalizadas segundo Colombeau.

# Capítulo 3

## Funções Generalizadas

Serão apresentados no presente capítulo alguns conceitos fundamentais da teoria das funções generalizadas de Colombeau. Para a apresentação destes conceitos seguiremos com a mesma exposição feita em [5]. As demonstrações dos teoremas, e outros detalhes sobre a teoria das funções generalizadas, podem ser encontrados em [5, 10, 12, 6, 13, 14].

### 3.1 Introdução às Funções Generalizadas

Seguindo [10], mostraremos como se deu o surgimento da teoria das funções generalizadas e apresentaremos algumas de suas principais aplicações.

No final dos anos 20 do século passado, começaram a surgir no campo da Física certos objetos denominados funções que, no entanto, não foram reconhecidos com a mesma denominação pelos matemáticos por não se enquadrarem na definição clássica. Como exemplo, pode-se citar a função delta de Dirac [12] que, na tentativa de se fornecer um rigor matemático ao trabalho do físico inglês Paul Dirac, passou a ser chamada pela comunidade matemática de *função generalizada*.

Posteriormente, em 1936, os fundamentos da teoria matemática das funções generalizadas foram desenvolvidos pelo matemático russo Sergei Lvovich Sobolev [15]. Após a II Guerra Mundial, o matemático francês Laurent Schwartz [16] realizou uma construção sistemática da teoria das funções generalizadas e suas aplicações, sendo seus resultados encontrados na monografia de sua autoria “Theorie des Distributions”, publicada em 1951. O conceito de Schwartz sobre funções generalizadas e distri-

buição passaram a ser usados como sinônimos, inaugurando um amplo campo de investigação matemática, penetrando, inclusive, campos da ciência em geral.

A idéia de função generalizada tem muito a ver com a necessidade de introduzir um conceito de solução mais amplo na teoria das equações diferenciais, denominadas soluções fracas ou generalizadas cuja definição pode ser encontrada na seção 2.4 do capítulo 2 deste trabalho. A seguir, serão apresentadas algumas definições importantes para que se possa definir o que vem a ser uma função generalizada.

## 3.2 Noções da Teoria das Distribuições

Seja  $\Omega$  um conjunto aberto em  $\mathbb{R}^n$ , denota-se por  $\mathcal{D}(\Omega)$  ao espaço vetorial de todas as funções (com valores escalares) de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sobre  $\Omega$  e com suporte compacto. O espaço  $\mathcal{D}(\Omega)$  é conhecido como “Espaço das funções teste”.

**Definição 3.2.1:** Pode-se definir as *funções generalizadas* como toda classe de funcionais lineares contínuos sobre o espaço das funções teste.

Seja  $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ . Uma distribuição sobre  $\Omega$  é um funcional linear e contínuo sobre o espaço das funções teste  $\mathcal{D}(\Omega)$ . A continuidade do funcional se entende no sentido de que  $T(\varphi_n) \rightarrow T(\varphi)$  quando  $\varphi_n \rightarrow \varphi$  em  $\mathcal{D}(\Omega)$ . Temos ainda que se  $D$  é um operador de derivação parcial arbitrário e  $o(D)$  é a ordem de derivação de  $D$ , então  $DT(\varphi) \in \mathcal{D}'(\Omega)$  é dada por

$$DT(\varphi) = (-1)^{o(D)}T(D\varphi), \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega). \quad (3.1)$$

Seja  $\alpha \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$  e  $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ , o produto  $\alpha T \in \mathcal{D}'(\Omega)$  está definido por

$$(\alpha T)(\varphi) = T(\alpha\varphi), \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega). \quad (3.2)$$

Como resultado temos que o produto de uma função de classe  $\mathcal{C}^\infty$  por uma distribuição, é também uma distribuição.

Qualquer função localmente integrável gera uma distribuição, com efeito se  $h \in L^1_{loc}(\Omega)$  (espaço das funções localmente integráveis sobre  $\Omega$ ), pode-se definir



$$T_h(\varphi) = \int_{\Omega} h(x)\varphi(x)dx, \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega). \quad (3.3)$$

As distribuições que podem ser geradas a partir de funções localmente integráveis são denominadas *regulares*, enquanto as que não podem ser representadas dessa forma são denominadas *singulares*.

Um resultado muito importante da teoria das distribuições e que foi demonstrado por Schwartz é o seguinte teorema, que será enunciado sem demonstração.

Baseado no **Teorema da Estrutura de Schwartz** tem-se que qualquer distribuição é localmente uma derivada parcial no sentido fraco de alguma função contínua [5]. Em outras palavras,  $\forall T \in \mathcal{D}'(\Omega)$  e  $\forall x_0 \in \Omega$  existe uma vizinhança aberta  $V_{x_0}$  de  $x_0$  em  $\Omega$ , uma função  $h \in \mathcal{C}(V_{x_0})$  e um operador  $D$  de derivação parcial tal que  $T|_{V_{x_0}} = Dh$  em  $\mathcal{D}'(V_{x_0})$ .

Portanto, do teorema acima, pode-se afirmar que as distribuições constituem o menor espaço no qual é permitido a diferenciação de todas as funções contínuas.

Uma das principais limitações da teoria das distribuições vem do fato que se torna impossível definir uma multiplicação de distribuições que extenda o produto clássico de funções contínuas e que conserve algumas boas propriedades tais como a regra de Leibniz para a derivação de um produto conforme demonstrado no **Teorema da Impossibilidade de Schwartz, 1954**, cujo enunciado e demonstração se encontram em [5]. Por este motivo, esta teoria se mostra insuficiente para enfrentar muitos problemas físicos importantes que são modelados por EDP's não lineares como é o caso da equação de B-L estudada neste trabalho.

Devido à não linearidade da EDP em estudo, utilizaremos como base uma teoria mais moderna de funções generalizadas, criada por Colombeau em 1980, cujos resultados mais importantes serão apresentados a seguir.

### 3.3 Funções Generalizadas de Colombeau

Seja um conjunto aberto qualquer  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^n$ . O conjunto das funções generalizadas de Colombeau sobre  $\Omega$  (com valores reais ou complexos, inclusive vetoriais) é denotado por  $\mathcal{G}(\Omega)$  e é uma álgebra diferencial (tem as mesmas operações e regras que se utilizam na álgebra diferencial  $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$  de todas as funções de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sobre  $\Omega$ ).

Denotando o espaço vetorial de todas as distribuições sobre  $\Omega$  por  $\mathcal{D}'(\Omega)$  que tem estrutura de espaço vetorial, temos as seguintes inclusões:

$$\mathcal{C}^\infty(\Omega) \subset \mathcal{D}'(\Omega) \subset \mathcal{G}(\Omega) \quad (3.4)$$

Além disso  $\mathcal{G}(\Omega)$  induz sobre  $\mathcal{D}'(\Omega)$  as operações próprias de um espaço vetorial, enquanto  $\mathcal{G}(\Omega)$  induz sobre  $\mathcal{C}(\Omega)$  todas as operações, incluindo a multiplicação. O produto das distribuições arbitrárias de  $\mathcal{D}'(\Omega)$  pertence a  $\mathcal{G}(\Omega)$ , mas em geral não estará em  $\mathcal{D}'(\Omega)$ .

A construção da álgebra diferencial de Colombeau não contradiz o resultado da impossibilidade de Schwartz visto que  $\mathcal{C}(\Omega)$  não é uma subálgebra de  $\mathcal{G}(\Omega)$ , o resultado determinante é que o produto das funções contínuas arbitrárias sobre  $\Omega$ , consideradas elementos de  $\mathcal{G}(\Omega)$ , nem sempre coincide com o produto clássico. A diferença em  $\mathcal{G}(\Omega)$  entre estes produtos é um “infinitesimal”. Esta diferença infinitesimal pode ser desprezada sempre que não aparecer multiplicada por uma “quantidade infinita”. Nos cálculos onde se trabalha com funções contínuas, e na maioria dos conceitos clássicos, estas “quantidades infinitas” não aparecem, e então a diferença entre estes produtos se torna insignificante. Portanto, a teoria de Colombeau é totalmente coerente com a análise clássica e a mesma foge do resultado da impossibilidade de Schwartz.

Para construir sua álgebra, Colombeau utilizou a idéia básica de quociente de uma certa álgebra diferencial de funções por um ideal na mesma álgebra. Deste modo, obteve uma álgebra diferencial denotada por  $\mathcal{G}(\Omega)$  na qual se podem incluir canonicamente as álgebras  $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$  e  $\mathcal{C}(\Omega)$ , assim como o espaço vetorial  $\mathcal{D}'(\Omega)$ . A álgebra geral de Colombeau  $\mathcal{G}(\Omega)$  serve de síntese para a maioria das multiplicações de distribuições existentes e para resultados gerais relacionados com os problemas

de existência e unicidade de soluções de EDP's. Porém, na prática, é suficiente utilizar uma versão simplificada desta álgebra. A álgebra simplificada das funções generalizadas de Colombeau é denotada por  $\mathcal{G}_s(\Omega)$  e trata-se de uma subálgebra de  $\mathcal{G}(\Omega)$  onde a multiplicação nesta álgebra simplificada não proporciona uma multiplicação canônica das distribuições. Embora  $\mathcal{G}_s(\Omega)$  não induza uma multiplicação de todas as distribuições, contém algumas dessas multiplicações comuns entre  $H$  e  $\delta$ , bem como suas potências e derivadas.

### 3.4 Álgebra Simplificada de Colombeau $\mathcal{G}_s(\Omega)$

Seja  $\Omega$  um domínio em  $\mathbb{R}^n$ . Considere-se o seguinte conjunto de funções reais

$$\mathcal{E}_s(\Omega) = \left\{ R(\varepsilon, x) : (0, 1) \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \text{ que são de classe } \mathcal{C}^\infty \text{ com respeito } \right. \\ \left. \text{à variável } x \in \Omega \text{ para cada } \varepsilon \in (0, 1) \right\}. \quad (3.5)$$

O conjunto  $\mathcal{E}_s(\Omega)$  tem estrutura de álgebra comutativa unitária com as operações usuais de adição, multiplicação por escalares e multiplicação de funções.

Seja  $D$  qualquer operador de derivação parcial e  $K$  um subconjunto compacto arbitrário de  $\Omega$  dizemos que  $h_{K,D}(R, \varepsilon) = \sup_{x \in K} |DR(\varepsilon, x)|$ . Consideremos o conjunto

$$\mathcal{E}_{M,s}(\Omega) = \left\{ R \in \mathcal{E}_s(\Omega) : \forall K \subset \Omega \text{ compacto e } \forall D, \exists q \in \mathbb{N}, \right. \\ \left. c > 0, \eta > 0 : h_{K,D}(R, \varepsilon) \leq c\varepsilon^{-q}, \forall 0 < \varepsilon < \eta \right\}. \quad (3.6)$$

O conjunto  $\mathcal{E}_{M,s}(\Omega)$  é uma subálgebra da álgebra  $\mathcal{E}_s(\Omega)$  pois além de ser um subespaço vetorial de  $\mathcal{E}_s(\Omega)$ , o produto de dois elementos  $R_1 R_2$  é um elemento de  $\mathcal{E}_{M,s}(\Omega)$  sempre que  $R_1 \in \mathcal{E}_{M,s}(\Omega)$  e  $R_2 \in \mathcal{E}_{M,s}(\Omega)$ . Além disso  $\mathcal{E}_{M,s}(\Omega)$  tem estrutura de álgebra diferencial, pois se  $R \in \mathcal{E}_{M,s}(\Omega)$ , então  $DR \in \mathcal{E}_{M,s}(\Omega)$  para qualquer operador diferencial  $D$ .

Finalmente, seja o conjunto

$$\mathcal{N}_s(\Omega) = \left\{ R \in \mathcal{E}_s(\Omega) : \forall K \subset \Omega \text{ compacto e } \forall D, \exists q \in \mathbb{N} : \forall p \geq q, \right. \\ \left. \exists c > 0, \eta > 0 : h_{K,D}(R, \varepsilon) \leq c\varepsilon^{p-q}, \forall 0 < \varepsilon < \eta \right\}. \quad (3.7)$$

O espaço vetorial  $\mathcal{N}_s(\Omega)$  é um ideal da álgebra diferencial  $\mathcal{E}_{M,s}(\Omega)$ .

**Definição 3.3.1:** A álgebra simplificada de funções generalizadas é o espaço quociente

$$\mathcal{G}_s = \frac{\mathcal{E}_{M,s}(\Omega)}{\mathcal{N}_s(\Omega)} \quad (3.8)$$

A igualdade entre funções generalizadas é a identidade entre elas como elementos de um espaço vetorial quociente [12]. Esta igualdade é o que se chama de *igualdade forte*. Porém, em  $\mathcal{G}_s(\Omega)$  existe uma outra relação de equivalência denominada *igualdade fraca*. Trata-se de uma associação de funções generalizadas, que será definida a seguir.

### 3.4.1 Associação de Funções Generalizadas

**Definição 3.3.2:** Sejam  $G_1, G_2 \in \mathcal{G}_s(\Omega)$ , diz-se que  $G_1$  está associado a  $G_2$  ( $G_1 \approx G_2$ ) se existem representantes  $R_1, R_2 \in \mathcal{E}_{M,s}(\Omega)$  de  $G_1$  e  $G_2$ , respectivamente, tais que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} [R_1(\varepsilon, x) - R_2(\varepsilon, x)] \varphi(x) dx = 0, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega). \quad (3.9)$$

A associação de funções generalizadas é compatível com as operações de diferenciação e produto por um escalar e, além disso, é transitiva. No entanto não é compatível com o produto entre funções generalizadas, de modo que dados  $G_1, G_2$  e  $G_3 \in \mathcal{G}_s(\Omega)$ :

1. Se  $G_1 \approx G_2, G_2 \approx G_3$ , então  $G_1 \approx G_3$ ;
2. seja  $D$  um operador diferencial, se  $G_1 \approx G_2$ , então  $DG_1 \approx DG_2$ ;
3. seja  $a \in \mathbb{R}$ , se  $G_1 \approx G_2$ , então  $aG_1 \approx aG_2$ ;
4. seja  $h \in C^\infty(\Omega)$ , se  $G_1 \approx G_2$ , então  $hG_1 \approx hG_2$ ;
5. mas se  $G_1 \approx G_2$ , não implica que  $G_3G_1 \approx G_3G_2$ .

*Observação 3.1:* Como resultado dos dois tipos de igualdade presentes em  $\mathcal{G}_s$  temos que se  $G_1 = G_2 \Rightarrow G_1 \approx G_2$ , enquanto  $G_1$  pode estar associada a  $G_2$  ainda que

$G_1 \neq G_2$ .

Consequentemente, ainda que  $\mathcal{G}_s(\Omega)$  não contenha  $\mathcal{D}'(\Omega)$  existe uma conexão entre este dois espaços [5].

### 3.4.2 Conexão entre $\mathcal{G}_s(\Omega)$ e $\mathcal{D}'(\Omega)$

**Definição 3.4.1:** Dizemos que uma função generalizada de Colombeau  $G \in \mathcal{G}_s(\Omega)$  admite a distribuição  $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$  como aspecto macroscópico se, e somente se,  $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$  se cumpre

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} R(\varepsilon, x) \varphi(x) dx = T(\varphi) \quad (3.10)$$

onde  $R(\varphi, x) \in \mathcal{E}_{M,s}$  é um representante arbitrário de  $G$ .

Se  $G_1 \in \mathcal{G}_s(\Omega)$  admite  $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$  como aspecto macroscópico e, além disso  $G_1 \approx G_2$ , então a função generalizada  $G_2 \in \mathcal{G}_s(\Omega)$  admitirá também a distribuição  $T$  como aspecto macroscópico.

### 3.4.3 Definições e Propriedades Básicas em $\mathcal{G}_s(\Omega)$

**Definição 3.5.1 (Funções Generalizadas de Heaviside):** Uma função generalizada  $H \in \mathcal{G}_s(\mathbb{R})$  se denomina função generalizada de Heaviside, se existe um representante da mesma  $R_H \in \mathcal{E}_{M,s}(\mathbb{R})$ , para o qual existe uma função  $A(\varepsilon) > 0$ ,  $A(\varepsilon) \rightarrow 0$  quando  $\varepsilon \rightarrow 0$  tal que:

1.  $R_H(\varepsilon, x) = 0, \forall \varepsilon \in (0, 1)$  e  $x < -A(\varepsilon)$ ;
2.  $R_H(\varepsilon, x) = 1, \forall \varepsilon \in (0, 1)$  e  $x > A(\varepsilon)$ ;
3.  $\sup |R_H(\varepsilon, x)| < +\infty : \varepsilon \in (0, 1), x \in \mathbb{R}$ .

**Definição 3.5.2:** Todas as funções generalizadas de Heaviside estão associadas entre si e admitem a distribuição de Heaviside  $T_H$  como aspecto macroscópico.

*Observação 3.2:* Da definição acima tem-se que qualquer potência de uma função generalizada de Heaviside é também uma função generalizada de Heaviside.

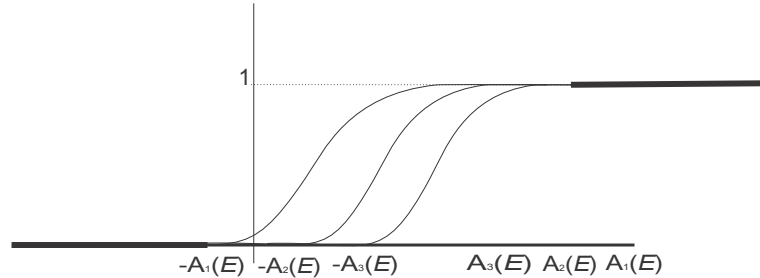


Figura 3.1: Funções generalizadas de Heaviside.

**Definição 3.5.3 (Funções Generalizadas  $\delta$  de Dirac):** Uma função generalizada  $\delta \in \mathcal{G}_s(\mathbb{R})$  se denomina função generalizada de Dirac, se existe um representante da mesma  $R_\delta \in \mathcal{E}_{M,s}(\mathbb{R})$ , para o qual existe uma função  $A(\varepsilon) > 0$ ,  $A(\varepsilon) \rightarrow 0$  quando  $\varepsilon \rightarrow 0$  tal que:

1.  $R_\delta(\varepsilon, x) = 0, \forall \varepsilon \in (0, 1)$  e  $|x| > A(\varepsilon)$ ;
2.  $\int_{\mathbb{R}} R_\delta(\varepsilon, x) dx = 1, \forall \varepsilon \in (0, 1)$ ;
3.  $\sup \int_{\mathbb{R}} |R_\delta(\varepsilon, x)| dx < +\infty : \varepsilon \in (0, 1), x \in \mathbb{R}$ .

Seja  $\delta_0 \in \mathcal{G}_s(\mathbb{R})$  uma função de Dirac, então existe  $H_0 \in \mathcal{G}_s(\mathbb{R})$  de Heaviside tal que  $H'_0 = \delta_0$ .

**Definição 3.5.4:** Todas as funções generalizadas de Dirac estão associadas entre si e admitem a distribuição  $\delta$  de Dirac como aspecto macroscópico.

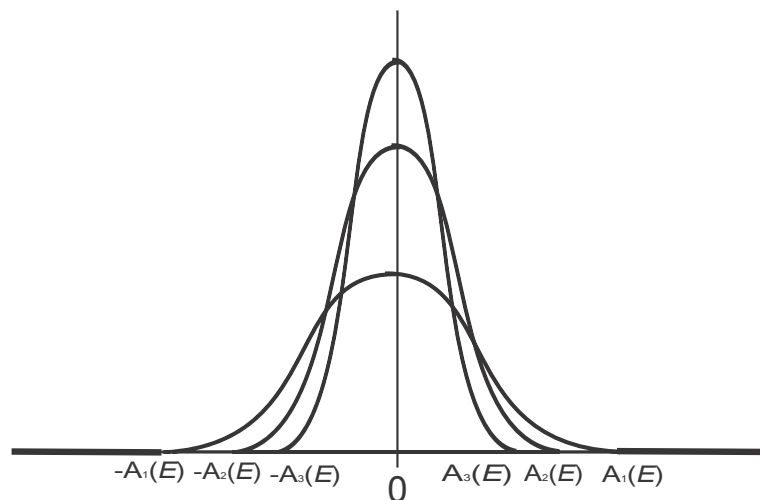


Figura 3.2: Funções generalizadas  $\delta$  de Dirac.

Seja  $H \in \mathcal{G}_s(\mathbb{R})$  uma função generalizada de Heaviside e  $\delta \in \mathcal{G}_s(\mathbb{R})$  uma função generalizada de Dirac, então se verificam as seguintes propriedades:

1.  $H^n \approx H, \forall n \geq 1, n \in \mathbb{N}$ .
2.  $H' \approx \delta$ .
3.  $H^k H' \approx \frac{1}{k+1} H', \forall k \geq 0, k \in \mathbb{N}$ .

Em [5, 10] foram demonstrados o cálculo que serve de base para o seguinte teorema:

**Teorema (Fundamentação Teórica das Cadeias de Hugoniot-Maslov para as ondas de Choque).** Sejam  $\mathcal{A}(t, x)$ ,  $\mathcal{B}(t, x)$  e  $\mathcal{C}(t, x)$  funções de Classe  $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2)$  tais que

$$\mathcal{A}(t, x) + \mathcal{B}(t, x)H(x - X(t)) + \mathcal{C}(t, x)\delta(x - X(t)) \approx 0. \quad (3.11)$$

onde  $H$  é uma função generalizada de Heaviside e  $\delta$  é uma função generalizada de Dirac. Se são propostos desenvolvimentos formais da forma

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \sum_{l=0}^{\infty} \mathcal{A}_l \tau^l \\ \mathcal{B} &= \sum_{l=0}^{\infty} \mathcal{B}_l \tau^l \\ \mathcal{C} &= \sum_{l=0}^{\infty} \mathcal{C}_l \tau^l \end{aligned} \quad (3.12)$$

então para que a equação (3.11) seja satisfeita, é necessário que  $\mathcal{A}_l(t) = 0, \mathcal{B}_l(t) = 0, \forall l = 0, 1, 2, \dots$  e  $\mathcal{C}_0(t) = 0, \forall t \in \mathbb{R}$ .

Para o teorema acima tem-se que  $\tau = x - X(t)$  onde  $X(t)$  é uma função suave.



## Capítulo 4

# Obtenção da Cadeia de Hugoniot-Maslov para Choques na Equação de Buckley-Leverett

Neste capítulo será aplicado o método assintótico desenvolvido por Maslov em 1970 [7] para a captura de soluções do tipo choque, quando elas existem, correspondentes ao problema de Riemann e Riemann Generalizado. Para tratar corretamente do problema da não linearidade da EDP os cálculos serão realizados no contexto das funções generalizadas de Colombeau.

Seja

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{u^2}{u^2 + \mu(1-u)^2} \right) \approx 0, \quad (4.1)$$

com condições iniciais do tipo (2.21).

Na equação (4.1) o operador “ $\approx$ ” representa a associação no sentido de Colombeau que é equivalente à formulação fraca (integral) da lei de conservação dada por (2.15). O método assintótico parte da base de existência de uma onda de choque como solução fraca e, portanto, supomos que

$$u(t, x) = A(t, x) + B(t, x)H(x - X(t)), \quad (4.2)$$

onde  $A$ ,  $B$  e  $X$  são funções suaves e  $X(0) = 0$ . Temos que a equação (4.2) é solução do problema de Cauchy para equação (4.1) com a condição inicial de Riemann generalizado escrita na forma

$$u(0, x) = u_l(x) + [u_r(x) - u_l(x)]H(x), \quad (4.3)$$

sendo  $H$  a função generalizada de Heaviside. A curva  $x = X(t)$  descreve a trajetória da singularidade inicialmente na origem [5].

Substituindo a equação (4.2) em (2.26) a função de fluxo será dada por

$$f(u) = \frac{A^2 + 2ABH + B^2H^2}{[A^2 + \mu(1 - A)^2] \cdot 1 + [(2A + 2\mu(A - 1))B] \cdot H + [B^2(1 + \mu)] \cdot H^2} \quad (4.4)$$

A proposição abaixo fornece um resultado importante a ser aplicado na equação (4.4) nos permitindo obter uma expressão para o fluxo que nos permita utilizar o Teorema da Fundamentação Teórica (Seção 3.4.3).

**Proposição 4.1:** Seja  $H \in \mathcal{G}_s(\Omega)$  uma função generalizada de Heaviside na variável  $\tau = x - X(t)$ . Sejam  $a(x)$ ,  $b(x)$ ,  $c(x)$ ,  $d(x)$ ,  $e(x)$  e  $f(x)$  funções suaves tais que  $d(x) > 0$  e  $d(x) + e(x) + f(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ , então

$$\frac{a(x) + b(x)H + c(x)H^2}{d(x) + e(x)H + f(x)H^2} \approx \begin{cases} \frac{a(x) + b(x) + c(x)}{d(x) + e(x) + f(x)} & \text{se } \tau > 0 \\ \frac{a(x)}{d(x)} & \text{se } \tau < 0 \end{cases} \quad (4.5)$$

Deste modo, teremos:

$$\frac{a(x) + b(x)H + c(x)H^2}{d(x) + e(x)H + f(x)H^2} \approx \frac{a(x)}{d(x)} + \left[ \frac{a(x) + b(x) + c(x)}{d(x) + e(x) + f(x)} - \frac{a(x)}{d(x)} \right] H(\tau). \quad (4.6)$$

Aplicando a proposição 4.1 na equação (4.4) obtemos a função de fluxo:

$$f(u) \approx \frac{A^2}{A^2 + \mu(1 - A)^2} + \left[ \frac{A^2 + 2AB + B^2}{(A + B)^2 + \mu[1 - (A + B)]^2} - \frac{A^2}{A^2 + \mu(1 - A)^2} \right] H(\tau), \quad (4.7)$$

onde  $\tau = x - X(t)$ .

Nota-se que foi possível utilizar a proposição pois  $A^2 + \mu(1 - A)^2 > 0$  e  $(A + B)^2 + \mu[1 - (A + B)]^2 > 0$ .

Derivando em relação a  $x$  a equação (4.7), obtém-se

$$\begin{aligned} (f(u))_x \approx & \left\{ \frac{2\mu AA_x - 2\mu A^2 A_x}{[A^2 + \mu(1-A)^2]^2} \right\} + \left\{ \frac{2\mu[1-(A+B)](A_x + B_x)(A+B)}{[(A+B)^2 + \mu[1-(A+B)]^2]^2} + \right. \\ & \left. + \frac{2\mu AA_x - 2\mu A^2 A_x}{[A^2 + \mu(1-A)^2]^2} \right\} H(\tau) + \\ & + \left\{ \frac{(A+B)^2}{(A+B)^2 + \mu[1-(A+B)]^2} - \frac{A^2}{A^2 + \mu(1-A)^2} \right\} H'(\tau). \end{aligned} \quad (4.8)$$

Derivando a função  $u(t, x) = A(t, x) + B(t, x)H(x - X(t))$  em relação à variável  $t$ , temos:

$$u_t = A_t + B_t H(\tau) - BX' H'(\tau). \quad (4.9)$$

Substituindo as equações (4.8) e (4.9) na equação (4.1), temos a equação que desejamos resolver:

$$\begin{aligned} & \left\{ A_t + \frac{2\mu AA_x - 2\mu A^2 A_x}{[A^2 + \mu(1-A)^2]^2} \right\} + \\ & + \left\{ B_t + \frac{2\mu[1-(A+B)](A_x + B_x)(A+B)}{[(A+B)^2 + \mu[1-(A+B)]^2]^2} + \frac{2\mu AA_x - 2\mu A^2 A_x}{[A^2 + \mu(1-A)^2]^2} \right\} H(\tau) + \\ & + \left\{ -BX' + \frac{(A+B)^2}{(A+B)^2 + \mu[1-(A+B)]^2} - \frac{A^2}{A^2 + \mu(1-A)^2} \right\} H'(\tau) \approx 0. \end{aligned} \quad (4.10)$$

## 4.1 Expansões Assintóticas em Séries de Potências

Desenvolvendo formalmente  $A(t, x)$  e  $B(t, x)$  em série de potências centradas em  $X(t)$ , teremos

$$A(t, x) = \sum_{l=0}^{\infty} A_l(t)(x - X(t))^l$$

e

$$B(t, x) = \sum_{l=0}^{\infty} B_l(t)(x - X(t))^l,$$

de modo que podemos reescrever a equação (4.2) como

$$u(t, x) = \sum_{l=0}^{\infty} A_l(t)(x - X(t))^l + \left[ \sum_{l=0}^{\infty} B_l(t)(x - X(t))^l \right] H(x - X(t)). \quad (4.11)$$

### 4.1.1 Séries de Potências

Tendo em vista que a formulação do problema descrito pela equação (4.10) envolve derivadas, potências e expressões, incluindo produtos para os termos  $A(t, x)$  e  $B(t, x)$ , descreveremos abaixo as funções que serão utilizadas e sua respectiva formulação em séries de potências. Para mais detalhes ver [5, 17].

#### 4.1.1.1 Séries que Envolvem a Função $A(t, x)$ , suas Potências e suas Derivadas

$$A = \sum_{l=0}^{\infty} A_l \tau^l, \quad (4.12)$$

$$A^2 = \sum_{l=0}^{\infty} \left( \sum_{i=0}^l A_{l-i} A_i \right) \tau^l, \quad (4.13)$$

$$A^3 = \sum_{l=0}^{\infty} \left[ \sum_{i=0}^l \left( \sum_{j=0}^{l-i} A_i A_j A_{l-i-j} \right) \right] \tau^l, \quad (4.14)$$

$$A^4 = \sum_{l=0}^{\infty} \left[ \sum_{i=0}^l \sum_{j=0}^{l-i} \left( \sum_{k=0}^{l-i-j} A_i A_j A_k A_{l-i-j-k} \right) \right] \tau^l, \quad (4.15)$$

$$A_t = \sum_{l=0}^{\infty} [A'_l - (l+1)A_{l+1}X'] \tau^l, \quad (4.16)$$

$$A_x = \sum_{l=0}^{\infty} (l+1)A_{l+1} \tau^l, \quad (4.17)$$

$$AA_x = \sum_{l=0}^{\infty} \left( \sum_{i=0}^l (i+1)A_{l-i}A_{i+1} \right) \tau^l, \quad (4.18)$$

$$A^2A_x = \sum_{l=0}^{\infty} \left[ \sum_{i=0}^l \left( \sum_{j=0}^{l-i} A_j A_{l-i-j} \right) (i+1)A_{i+1} \right] \tau^l, \quad (4.19)$$

$$A^3 A_x = \sum_{l=0}^{\infty} \left[ \sum_{i=0}^l \left( \sum_{j=0}^{l-i} \sum_{k=0}^{l-i-j} A_j A_k A_{l-i-j-k} \right) (i+1) A_{i+1} \right] \tau^l. \quad (4.20)$$

#### 4.1.1.2 Séries que Envolvem a Função $B(t, x)$ , suas Potências e suas Derivadas

$$B = \sum_{l=0}^{\infty} B_l \tau^l, \quad (4.21)$$

$$B^2 = \sum_{l=0}^{\infty} \left( \sum_{i=0}^l B_{l-i} B_i \right) \tau^l, \quad (4.22)$$

$$B^3 = \sum_{l=0}^{\infty} \left( \sum_{i=0}^l \sum_{j=0}^{l-i} B_i B_j B_{l-i-j} \right) \tau^l, \quad (4.23)$$

$$B^4 = \sum_{l=0}^{\infty} \left( \sum_{i=0}^l \sum_{j=0}^{l-i} \sum_{k=0}^{l-i-j} B_i B_j B_k B_{l-i-j-k} \right) \tau^l, \quad (4.24)$$

$$B_t = \sum_{l=0}^{\infty} [B'_l - (l+1) B_{l+1} X'] \tau^l, \quad (4.25)$$

$$B_x = \sum_{l=0}^{\infty} (l+1) B_{l+1} \tau^l, \quad (4.26)$$

$$B B_x = \sum_{l=0}^{\infty} \left( \sum_{i=0}^l (i+1) B_{l-i} B_{i+1} \right) \tau^l, \quad (4.27)$$

$$B^2 B_x = \sum_{l=0}^{\infty} \left[ \left( \sum_{i=0}^l \sum_{j=0}^{l-i} B_j B_{l-i-j} \right) (i+1) B_{i+1} \right] \tau^l. \quad (4.28)$$

#### 4.1.1.3 Séries que Envolvem as Funções $A(t, x)$ e $B(t, x)$ , suas Potências e suas Derivadas

$$AB = \sum_{l=0}^{\infty} \left( \sum_{i=0}^l A_{l-i} B_i \right) \tau^l, \quad (4.29)$$

$$A^2 B = \sum_{l=0}^{\infty} \left[ \sum_{i=0}^l \left( \sum_{j=0}^{l-i} A_j A_{l-i-j} \right) B_i \right] \tau^l, \quad (4.30)$$

$$A^3B = \sum_{l=0}^{\infty} \left[ \sum_{i=0}^l \left( \sum_{j=0}^{l-i} \sum_{k=0}^{l-i-j} A_j A_k A_{l-i-j-k} \right) B_i \right] \tau^l, \quad (4.31)$$

$$AB^2 = \sum_{l=0}^{\infty} \left[ \sum_{i=0}^l A_{l-i} \left( \sum_{j=0}^i B_j B_{i-j} \right) \right] \tau^l, \quad (4.32)$$

$$AB^3 = \sum_{l=0}^{\infty} \left[ \sum_{i=0}^l A_{l-i} \left( \sum_{j=0}^i \sum_{k=0}^{i-j} B_j B_k B_{i-j-k} \right) \right] \tau^l, \quad (4.33)$$

$$A^2B^2 = \sum_{l=0}^{\infty} \left[ \sum_{i=0}^l \left( \sum_{j=0}^{l-i} A_j A_{l-i-j} \right) \left( \sum_{j=0}^i B_j B_{i-j} \right) \right] \tau^l, \quad (4.34)$$

$$AB_x = \sum_{l=0}^{\infty} \left( \sum_{i=0}^l (i+1) A_{l-i} B_{i+1} \right) \tau^l, \quad (4.35)$$

$$A^2B_x = \sum_{l=0}^{\infty} \left[ \sum_{i=0}^l \left( \sum_{j=0}^{l-i} A_j A_{l-i-j} \right) (i+1) B_{i+1} \right] \tau^l, \quad (4.36)$$

$$BA_x = \sum_{l=0}^{\infty} \left( \sum_{i=0}^l (i+1) B_{l-i} A_{i+1} \right) \tau^l, \quad (4.37)$$

$$B^2A_x = \sum_{l=0}^{\infty} \left[ \sum_{i=0}^l \left( \sum_{j=0}^{l-i} B_j B_{l-i-j} \right) (i+1) A_{i+1} \right] \tau^l, \quad (4.38)$$

$$ABA_x = \sum_{l=0}^{\infty} \left[ \sum_{i=0}^l \left( \sum_{j=0}^{l-i} A_{l-i-j} B_j \right) (i+1) A_{i+1} \right] \tau^l, \quad (4.39)$$

$$ABB_x = \sum_{l=0}^{\infty} \left[ \sum_{i=0}^l \left( \sum_{j=0}^{l-i} A_{l-i-j} B_j \right) (i+1) B_{i+1} \right] \tau^l. \quad (4.40)$$

#### 4.1.1.4 Séries que Envolvem o Coeficiente de Viscosidade

$$\sum_{l=0}^{\infty} E_l \tau^l \text{ onde } E_0 = \mu \text{ e } E_i = 0, \quad \forall i > 0, \quad (4.41)$$

$$\sum_{l=0}^{\infty} D_l \tau^l \text{ onde } D_0 = \mu^2 \text{ e } D_i = 0, \quad \forall i > 0. \quad (4.42)$$

Nesse caso utilizamos esse artifício para poder expressar os termos constantes em forma de séries que serão usadas posteriormente.

#### 4.1.1.5 Divisão de Séries

Observamos que quando substituirmos as séries acima na equação (4.10), irá ocorrer divisões entre séries. No entanto, foi encontrada na literatura apenas fórmulas para produto de séries. O método de divisão de séries que aplicaremos, ainda não foi publicado sendo a primeira aparição desta fórmula neste trabalho.

Sejam as séries

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \tau^k$$

e

$$\sum_{k=0}^{\infty} b_k \tau^k.$$

O produto destas séries irá resultar em uma outra série, isto é:

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k \tau^k = \left( \sum_{k=0}^{\infty} a_k \tau^k \right) \left( \sum_{k=0}^{\infty} b_k \tau^k \right). \quad (4.43)$$

Efetuando o produto termo a termo, tem-se

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} c_k \tau^k &= (a_0 + a_1 \tau + a_2 \tau^2 + a_3 \tau^3 + \dots) (b_0 + b_1 \tau + b_2 \tau^2 + b_3 \tau^3 + \dots) \\ &= (a_0 b_0 + a_0 b_1 \tau + a_0 b_2 \tau^2 + a_0 b_3 \tau^3 + a_1 b_0 \tau + a_1 b_1 \tau^2 + a_1 b_2 \tau^3 + a_2 b_0 \tau^2 + \dots) \\ &= (a_0 b_0 + a_0 b_1 \tau + a_1 b_0 \tau + a_0 b_2 \tau^2 + a_1 b_1 \tau^2 + a_2 b_0 \tau^2 + a_0 b_3 \tau^3 + a_1 b_2 \tau^3 + \dots) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \left( \sum_{i=0}^k a_i b_{k-i} \right) \tau^k. \end{aligned}$$

Portanto,

$$c_k = \sum_{i=0}^k a_i b_{k-i}, \forall k. \quad (4.44)$$

A partir do produto entre séries desenvolvido acima, queremos encontrar uma fórmula para o quociente  $\frac{\sum c_k \tau^k}{\sum b_k \tau^k}$ . Aplicando o processo inverso, encontramos uma fórmula em recorrência:

$$c_0 = a_0 b_0 \Rightarrow a_0 = \frac{c_0}{b_0},$$

$$c_1 = a_0 b_1 + a_1 b_0 \Rightarrow a_1 = \frac{c_1 - \frac{c_0}{b_0} b_1}{b_0} = \frac{c_1}{b_0} - \frac{c_0 b_1}{b_0^2} = \frac{c_1 b_0}{b_0 b_0} - \frac{c_0 b_1}{b_0^2} = \frac{c_1 b_0 - c_0 b_1}{b_0^2},$$

$$c_2 = a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0 \Rightarrow a_2 = \frac{c_2 - \frac{c_0}{b_0} b_2 - \frac{c_1 - \frac{c_0}{b_0} b_1}{b_0} b_1}{b_0} = \frac{c_2}{b_0} - \frac{c_0 b_2}{b_0^2} - \left( \frac{c_1}{b_0^2} b_1 - \frac{c_0}{b_0^3} b_1^2 \right),$$

$$c_3 = a_0 b_3 + a_1 b_2 + a_2 b_1 + a_3 b_0 \Rightarrow a_3 = \frac{c_3 - a_0 b_3 - a_1 b_2 - a_2 b_1}{b_0} = \frac{c_3}{b_0} - \frac{\left(\frac{c_0}{b_0}\right) b_3}{b_0} - \frac{\left(\frac{c_1}{b_0} - \frac{c_0 b_1}{b_0^2}\right) b_2}{b_0} - \frac{\left(\frac{c_2}{b_0} - \frac{c_0 b_2}{b_0^2} - \frac{c_1 b_1}{b_0^2} + \frac{c_0 b_1^2}{b_0^3}\right) b_1}{b_0} = \frac{c_3 b_0^3}{b_0 b_0^3} - \frac{c_0 b_3 b_0^2}{b_0^2 b_0^2} - \frac{c_1 b_2 b_0^2}{b_0^2 b_0^2} + \frac{c_0 b_1 b_2 b_0}{b_0^3 b_0} - \frac{c_2 b_1}{b_0^2} + \frac{c_0 b_2 b_1}{b_0^3} + \frac{c_1 b_1^2}{b_0^3} - \frac{c_0 b_1^3}{b_0^4}.$$

Portanto, temos que

$$a_k = \frac{1}{b_0^{k+1}} \sum_{m=0}^k c_m \cdot \alpha(k, m), \quad (4.45)$$

onde

$$\alpha(k, m) = \sum_{(S_0, \dots, S_k) \in \Omega_{k, m}} (-1)^{k+S_0} \left[ b_0^{S_0} \times b_1^{S_1} \times \dots \times b_k^{S_k} \right], \quad (4.46)$$

é tal que

$$\Omega_{k, m} = \left\{ (S_0, \dots, S_k) \in \mathbb{N}^k, \text{ tais que } \sum_{n=0}^k S_n = k, \sum_{n=0}^k n S_n = k - m \right\}. \quad (4.47)$$



### 4.1.2 Cadeia de Hugoniot-Maslov para a Equação de Buckley-Leverett

A partir dos resultados obtidos pode-se transformar as séries em cada termo por uma única série. Substituindo todas as séries da seção anterior na equação (4.10):

$$\begin{aligned}
& \sum_{l=0}^{\infty} \left[ A'_l - (l+1)A_{l+1}X' + \frac{1}{(b_0^I)^{l+1}} \sum_{m=0}^l c_m^I \alpha^I(l, m) \right] \tau^l \cdot 1 + \\
& \sum_{l=0}^{\infty} \left[ B'_l - (l+1)B_{l+1}X' + \frac{1}{(b_{01}^{II})^{l+1}} \sum_{m=0}^{l+1} c_{m,1}^{II} \alpha_1^{II}(l, m) + \frac{1}{(b_{02}^{II})^{l+1}} \sum_{m=0}^l c_{m,2}^{II} \alpha_2^{II}(l, m) \right] \tau^l \cdot H(\tau) + \\
& \sum_{l=0}^{\infty} \left[ -B_l X' + \frac{1}{(b_{01}^{III})^{l+1}} \sum_{m=0}^l c_{m,1}^{III} \alpha_1^{III}(l, m) - \frac{1}{(b_{02}^{III})^{l+1}} \sum_{m=0}^l c_{m,2}^{III} \alpha_2^{III}(l, m) \right] \tau^l \cdot H'(\tau) \approx 0,
\end{aligned} \tag{4.48}$$

onde o supraíndice  $I$  corresponde ao termo que multiplica 1, o supraíndice  $II$  ao termo que multiplica  $H(\tau)$  e o supraíndice  $III$  ao termo que multiplica  $H'(\tau)$ . Daí podemos descrever cada termo, como segue.

- Primeiro termo:

$$c_m^I = 2\mu \sum_{i=0}^l (i+1)A_{m-i}A_{i+1} - 2\mu \sum_{i=0}^m \left( \sum_{j=0}^{m-i} A_j A_{m-i-j} \right) (i+1)A_{i+1},$$

$$\alpha^I(k, m) = \sum_{(S_0, \dots, S_k) \in \Omega_{k,m}} (-1)^{k+S_0} \left[ (b_0^I)^{S_0} \times (b_1^I)^{S_1} \times \dots \times (b_k^I)^{S_k} \right],$$

$$\begin{aligned}
b_m^I &= D_m - 4\mu^2 A_m + 2\mu(1+3\mu) \sum_{i=0}^m A_{m-i}A_i - 4\mu(1+\mu) \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^{m-i} A_i A_j A_{m-i-j} + \\
&+ (1+\mu)^2 \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^{m-i} \sum_{k=0}^{m-i-j} A_i A_j A_k A_{m-i-j-k},
\end{aligned}$$

com

$$b_0^I = [\mu - 2\mu A_0 + (1 + \mu)A_0^2]^2 > 0.$$

• Segundo Termo:

$$\begin{aligned} c_{m,1}^{II} &= 2\mu \sum_{i=0}^m (i+1)A_{m-i}A_{i+1} + 2\mu \sum_{i=0}^m (i+1)A_{m-i}B_{i+1} + 2\mu \sum_{i=0}^m (i+1)B_{m-i}A_{i+1} + \\ &+ 2\mu \sum_{i=0}^m (i+1)B_{m-i}B_{i+1} - 2\mu \sum_{i=0}^m \left( \sum_{j=0}^{m-i} A_j A_{m-i-j} \right) (i+1)A_{i+1} + \\ &- 4\mu \sum_{i=0}^m \left( \sum_{j=0}^{m-i} A_{m-i-j} B_j \right) (i+1)A_{i+1} - 2\mu \left( \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^{m-i} B_j B_{m-i-j} \right) (i+1)A_{i+1} + \\ &- 2\mu \left( \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^{m-i} A_j A_{m-i-j} \right) (i+1)B_{i+1} - 4\mu \sum_{i=0}^m \left( \sum_{j=0}^{m-i} A_{m-i-j} B_j \right) (i+1)B_{i+1} + \\ &- 2\mu \sum_{i=0}^m \left( \sum_{j=0}^{m-i} B_j B_{m-i-j} \right) (i+1)B_{i+1}, \end{aligned}$$

$$c_{m,2}^{II} = 2\mu \sum_{i=0}^m \left( \sum_{j=0}^{m-i} A_j A_{m-i-j} \right) (i+1)A_{i+1} - 2\mu \sum_{i=0}^m (i+1)A_{m-i}A_{i+1}.$$

Sendo:

$$\alpha_1^{II}(k, m) = \sum_{(S_0, \dots, S_k) \in \Omega_{k,m}} (-1)^{k+S_0} \left[ (b_{01}^{II})^{S_0} \times (b_{11}^{II})^{S_1} \times \dots \times (b_{k1}^{II})^{S_k} \right],$$

e

$$\alpha_2^{II}(k, m) = \sum_{(S_0, \dots, S_k) \in \Omega_{k,m}} (-1)^{k+S_0} \left[ (b_{02}^{II})^{S_0} \times (b_{12}^{II})^{S_1} \times \dots \times (b_{k2}^{II})^{S_k} \right],$$

$$\begin{aligned}
b_{m,1}^{II} = & D_m - 4\mu^2(A_m + B_m) + (2\mu + 6\mu^2) \sum_{i=0}^m A_{m-i}A_i + B_{m-i}B_i - \\
& + (4\mu + 4\mu^2) \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^{m-i} A_iA_jA_{m-i-j} + B_iB_jB_{m-i-j} + \\
& + (1 + \mu)^2 \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^{m-i} \sum_{k=0}^{m-i-j} A_iA_jA_kA_{m-i-j-k} + B_iB_jB_kB_{m-i-j-k} + (4\mu + 12\mu^2) \sum_{i=0}^m A_{m-i}B_i - \\
& + (12\mu + 12\mu^2) \sum_{i=0}^m \left[ \left( \sum_{j=0}^{m-i} A_jA_{m-i-j} \right) B_i + A_{m-i} \left( \sum_{j=0}^i B_jB_{i-j} \right) \right] + \\
& + (4 + 8\mu + 4\mu^2) \left( \sum_{i=0}^m \left[ \left( \sum_{j=0}^{m-i} \sum_{k=0}^{m-i-j} A_jA_kA_{m-i-j-k} \right) B_i \right] + \right. \\
& \left. + \sum_{i=0}^m \left[ A_{m-i} \left( \sum_{j=0}^i \sum_{k=0}^{i-j} B_jB_kB_{i-j-k} \right) \right] \right) + \\
& + (6 + 12\mu + 6^2) \sum_{i=0}^m \left( \sum_{j=0}^{m-i} A_jA_{m-i-j} \right) \left( \sum_{j=0}^i B_jB_{i-j} \right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b_{m,2}^{II} = & D_m - 4\mu^2 A_m + (2\mu + 6\mu^2) \sum_{i=0}^m A_{m-i}A_i - (4\mu + 4\mu^2) \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^{m-i} A_iA_jA_{m-i-j} + \\
& + (1 + \mu)^2 \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^{m-i} \sum_{k=0}^{m-i-j} A_iA_jA_kA_{m-i-j-k},
\end{aligned}$$

com

$$b_{0,1}^{II} = [(1 + \mu)(A_0 + B_0)^2 - 2\mu(A_0 + B_0) + \mu]^2 > 0,$$

e

$$b_{0,2}^{II} = [(1 + \mu)A_0^2 - 2\mu A_0 + \mu]^2 > 0.$$

- Terceiro Termo:

$$c_{m,1}^{III} = \sum_{i=0}^m A_{m-i}A_i + 2 \sum_{i=0}^m A_{m-i}B_i + \sum_{i=0}^m B_{m-i}B_i,$$

$$c_{m,2}^{III} = \sum_{i=0}^m A_{m-i}A_i.$$

Sendo:

$$\alpha_1^{III}(k, m) = \sum_{(S_0, \dots, S_k) \in \Omega_{k,m}} (-1)^{k+S_0} \left[ (b_{01}^{III})^{S_0} \times (b_{11}^{III})^{S_1} \times \dots \times (b_{k1}^{III})^{S_k} \right],$$

e

$$\alpha_2^{III}(k, m) = \sum_{(S_0, \dots, S_k) \in \Omega_{k,m}} (-1)^{k+S_0} \left[ (b_{02}^{III})^{S_0} \times (b_{12}^{III})^{S_1} \times \dots \times (b_{k2}^{III})^{S_k} \right],$$

$$b_{m,1}^{III} = E_m - 2\mu(A_m + B_m) + (1 + \mu) \sum_{i=0}^m (A_{m-i}A_i) + (B_{m-i}B_i) + 2(A_{m-i}B_i),$$

$$b_{m,2}^{III} = E_m - 2m + (1 + \mu) \sum_{i=0}^m A_{m-i}A_i,$$

com

$$b_{0,1}^{III} = [(1 + \mu)(A_0 + B_0)^2 - 2\mu(A_0 + B_0) + \mu] > 0,$$

e

$$b_{0,2}^{III} = [(1 + \mu)A_0^2 - 2\mu A_0 + \mu] > 0.$$

As variáveis  $b_0^I$ ,  $c_m^I$ ,  $\alpha^I$ ,  $b_{01}^{II}$ ,  $b_{02}^{II}$ ,  $c_{m,1}^{II}$ ,  $c_{m,2}^{II}$ ,  $\alpha_1^{II}$ ,  $\alpha_2^{II}$ ,  $b_{01}^{III}$ ,  $b_{02}^{III}$ ,  $c_{m,1}^{III}$ ,  $c_{m,2}^{III}$ ,  $\alpha_1^{III}$  e  $\alpha_2^{III}$  nas equações acima determinam os coeficientes da divisão das séries que apresentam uma combinação diferente conforme lhes são atribuídos valores de acordo com as definições apresentadas na seção anterior.

A seguir, aplicaremos o Teorema da Fundamentação Teórica de modo a igualar todos os coeficientes do primeiro e segundo termos, e o termo zero do terceiro termo a zero.

## 4.2 Truncamento da Cadeia de Hugoniot-Maslov

Uma vantagem do uso das cadeias de Hugoniot-Maslov é que a sua resolução numérica permite a obtenção dos coeficientes aproximados da expansão assintótica da solução proposta e a trajetória dos pontos singulares da solução. Primeiramente devemos truncar as cadeias numa determinada ordem de aproximação  $N$  de modo que obteremos um sistema de  $2N + 3$  EDO's denominado sistema "truncado". Uma dificuldade adicional encontrada é que o sistema truncado não é fechado apresentando mais incógnitas do que equações. Para o sistema truncado de ordem  $N$ , apareceram as incógnitas  $X(t)$ ,  $A_l(t)$ ,  $B_l(t)$ , para  $l = 0, 1, 2, \dots, N$  e mais duas incógnitas adicionais  $A_{N+1}(t)$  e  $B_{N+1}(t)$ .

Para esse trabalho o sistema será resolvido com ordem de truncamento  $N = 2$ , de modo que o sistema truncado possui sete equações diferenciais e nove incógnitas. Usando os resultados de Prasad e Ravindra (ver [18]) fazemos  $A_3 = B_3 = 0$ , tornando o nosso sistema "truncado" fechado, cuja solução nos permitirá obter de maneira aproximada a solução do tipo onda de choque para a Equação de Buckley-Leverett.

Fazendo o truncamento da Cadeia de Hugoniot-Maslov para  $l = 0, 1, 2$ :

$$\left\{ \begin{array}{l}
A'_0 - A_1 X' + \frac{1}{(b'_0)} c'_0 \cdot \alpha^I(0, 0) = 0 \\
A'_1 - 2A_2 X' + \frac{1}{(b'_0)^2} [c'_0 \cdot \alpha^I(1, 0) + c'_1 \cdot \alpha^I(1, 1)] = 0 \\
A'_2 - 3A_3 X' + \frac{1}{(b'_0)^3} [c'_0 \cdot \alpha^I(2, 0) + c'_1 \cdot \alpha^I(2, 1) + c'_2 \cdot \alpha^I(2, 2)] = 0 \\
B'_0 - B_1 X' + \frac{1}{(b''_0)} c''_0 \cdot \alpha^{II}(0, 0) + \frac{1}{(b''_0)} c''_1 \cdot \alpha^{II}(0, 0) = 0 \\
B'_1 - 2B_2 X' + \frac{1}{(b''_0)^2} [c''_0 \cdot \alpha^{II}(1, 0) + c''_1 \cdot \alpha^{II}(1, 1)] + \frac{1}{(b''_0)^2} [c''_2 \cdot \alpha^{II}(1, 0) + c''_3 \cdot \alpha^{II}(1, 1)] = 0 \\
B'_2 - 3B_3 X' + \frac{1}{(b''_0)^3} [c''_0 \cdot \alpha^{II}(2, 0) + c''_1 \cdot \alpha^{II}(2, 1) + c''_2 \cdot \alpha^{II}(2, 2)] + \\
\frac{1}{(b''_0)^3} [c''_3 \cdot \alpha^{II}(2, 0) + c''_4 \cdot \alpha^{II}(2, 1) + c''_5 \cdot \alpha^{II}(2, 2)] = 0 \\
-B_0 X' + \frac{1}{b'''_0} c'''_0 \cdot \alpha^{III}(0, 0) - \frac{1}{b'''_0} c'''_1 \cdot \alpha^{III}(0, 0) = 0
\end{array} \right. \tag{4.49}$$

# Capítulo 5

## Resultados Numéricos

Neste capítulo traremos os resultados da solução numérica aproximada, obtida através de simulação computacional em linguagem MATLAB® do método assintótico, desenvolvido por Maslov para soluções descontínuas do tipo choque, adaptado para a equação de B-L com condições iniciais do tipo Riemann e Riemann generalizado (ver seções 2.5 e 2.5.1). O código foi implementado seguindo as mesmas ideias presentes em [5], detalhadas a seguir.

Após a obtenção da cadeia truncada de Hugoniot-Maslov buscamos aproximar numericamente as soluções descontínuas para as condições iniciais dadas. A partir dos resultados de Prasad-Ravindran [18], obtém-se um sistema fechado de EDO's contendo 7 equações e 7 variáveis. Partindo de um vetor inicial cujas componentes são dadas por  $\vec{y}_0 = [X(0) A_0(0) A_1(0) A_2(0) B_0(0) B_1(0) B_2(0)]$ , aplica-se um resolutor do próprio MATLAB® para resolução de sistemas de EDO's `ode45`<sup>1</sup>. As variáveis  $A_0, A_1, A_2, B_0, B_1$  e  $B_2$  dependem das funções  $u_l$  e  $u_r$  e suas derivadas nas condições iniciais do problema, onde:  $X(0) = 0$ ,  $A_0(0) = u_l(0)$ ,  $A_1(0) = \frac{u_l'(0)}{2}$ ,  $A_2(0) = \frac{u_l''(0)}{2}$ ,  $B_0(0) = u_r(0) - u_l(0)$ ,  $B_1(0) = \frac{u_r'(0) - u_l'(0)}{2}$  e  $B_2(0) = \frac{u_r''(0) - u_l''(0)}{2}$ . O intervalo de integração para o resolutor escolhido foi  $[0, 1]$  obtendo-se a matriz  $\mathbf{y}$  cujas linhas correspondem ao número de interações temporais realizadas e que possui 7 colunas que correspondem às variáveis  $X(t)$ ,  $A_0(t)$ ,  $A_1(t)$ ,  $A_2(t)$ ,  $B_0(t)$ ,  $B_1(t)$  e  $B_2(t)$ , dispostas nesta mesma ordem. Obtidas essas variáveis reconstrói-se a solução de acordo com  $u(t, x) = \sum_{l=0}^2 A_l(t)(x - X(t))^l + \left[ \sum_{l=0}^2 B_l(t)(x - X(t))^l \right] H(x - X(t))$ . Mais detalhes sobre a implementação computaci-

---

<sup>1</sup>Resolutor de equações diferenciais de primeira ordem não-stiff de precisão média. **Fonte:** [www.mathworks.com](http://www.mathworks.com)

onal do método numérico de Maslov adaptado para a equação de B-L podem ser vistos no apêndice.

Busca-se, através das simulações numéricas realizadas, verificar a eficiência do método assintótico na captação das ondas de choque. Uma vez obtida a solução numérica da equação de B-L, serão comparadas as ondas de choque captadas com o método assintótico e ondas captadas com métodos de diferenças finitas para um mesmo tempo  $t$  fixo. Os métodos de diferenças finitas utilizados são os métodos clássicos Lax-Wendroff, Godunov e NT [1], cujos esquemas numéricos de discretização se encontram no apêndice. Os programas e códigos para os métodos de diferenças finitas utilizados não formam parte deste trabalho sendo cedidos gentilmente para a realização do mesmo.

Finalmente comparamos os resultados obtidos pelo método assintótico de Maslov desenvolvido neste trabalho com os resultados que se obtém ao considerar uma aproximação polinomial do fluxo de B-L feita antes da aplicação do método assintótico (ver [5]).

## 5.1 Comparação com Métodos de Diferenças Finitas

Nesta seção serão apresentados em cada exemplo os gráficos da condição inicial, da solução numérica 3D, da trajetória da singularidade e de profundidade obtidos pelo método assintótico. Posteriormente apresentaremos o gráfico que compara os perfis de singularidade para duas iterações temporais diferentes obtidas com o método assintótico de Maslov desenvolvido neste trabalho e com métodos clássicos de diferenças finitas - Lax-Wendroff, Godunov e NT.

### Exemplo 1

Neste primeiro exemplo será aplicado o método assintótico desenvolvido para o fluxo de B-L com a condição inicial clássica de Riemann dada por

$$u(0, x) = \begin{cases} 0.5 & \text{se } x < 0 \\ 0 & \text{se } x \geq 0 \end{cases} \quad (5.1)$$

O programa realizou 77 iterações temporais.



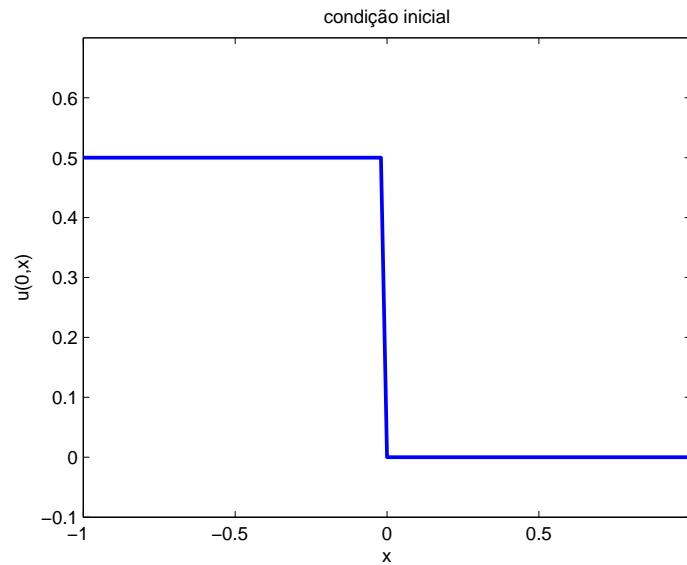


Figura 5.1: Gráfico da condição inicial do problema de Riemann.

A figura 5.1 apresenta o gráfico da condição inicial do problema.

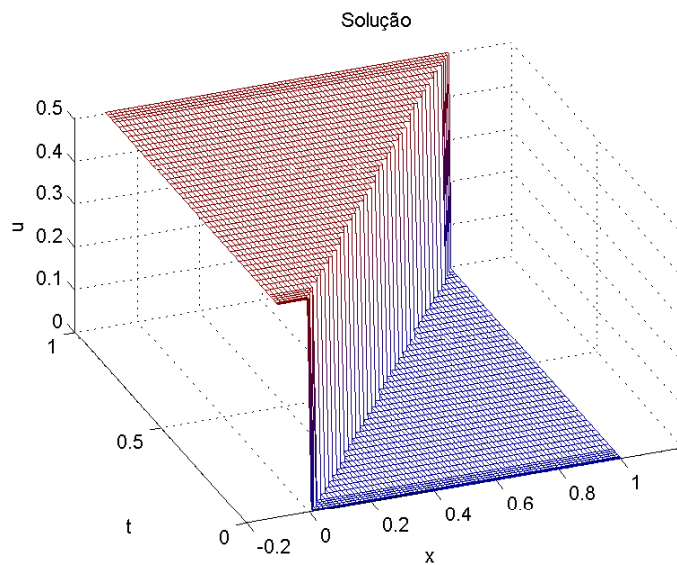


Figura 5.2: Solução numérica em 3D do método assintótico para o problema de Riemann.

A figura 5.2 apresenta o gráfico da solução numérica em 3D obtida através do método assintótico. Nota-se que o tamanho do salto é mantido constante ao longo da descontinuidade. Neste caso pode-se dizer que a solução é interpolante: coincide na malha numérica com a solução exata do problema.

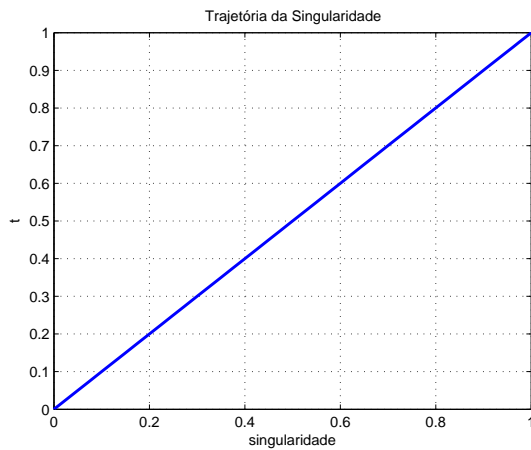


Figura 5.3: *Trajétória da singularidade para o problema de Riemann.*

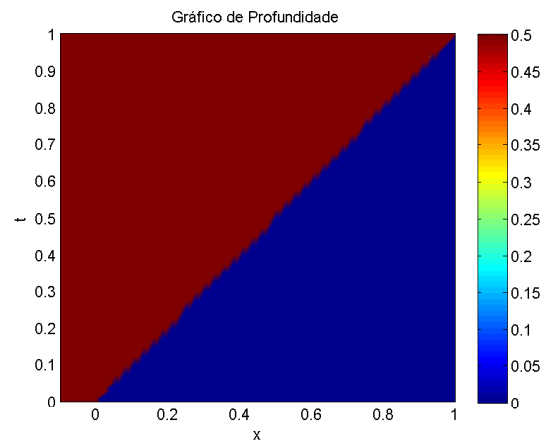


Figura 5.4: *Gráfico de profundidade para o problema de Riemann.*

A figura 5.3 apresenta o gráfico da trajetória da singularidade que é uma linha reta, como esperado, por se tratar do problema de Riemann. Já a figura 5.4 apresenta o gráfico em profundidade para o problema clássico de Riemann que confirma que a altura da solução é, de fato, constante.

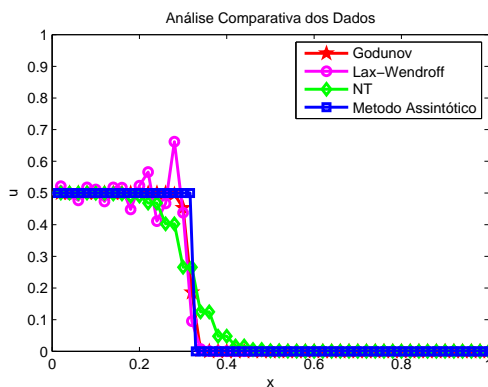


Figura 5.5: *Perfis de onda para o problema de Riemann: iteração temporal 48.*

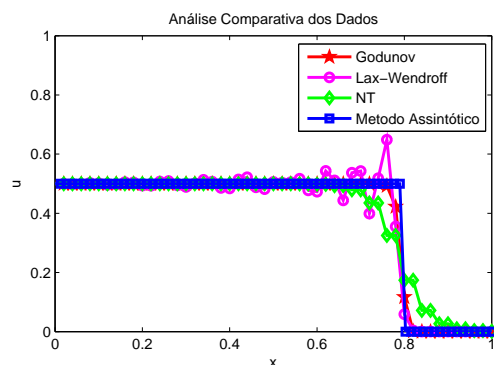


Figura 5.6: *Perfis de onda para o problema de Riemann: iteração temporal 67.*

Nas figuras 5.5 e 5.6 é feita uma comparação entre os perfis de onda obtidos através do método assintótico para o fluxo de B-L e os perfis obtidos com os métodos de diferenças finitas para duas iterações temporais: a primeira próxima ao meio da simulação, iteração 46, e a segunda mais ao final, iteração 67.

*Observação 5.1: Para esta condição inicial a solução do tipo choque para as iterações apresentadas é entrópica e o método que melhor a capta a onda de choque durante sua propagação no tempo é o método assintótico de B-L.*

**Exemplo 2**

Considere-se a condição inicial

$$u(0, x) = \begin{cases} 0.5 + \frac{1}{100}x + \frac{1}{200}x^2 & \text{se } x < 0 \\ 0 + \frac{1}{100}x + \frac{1}{200}x^2 & \text{se } x \geq 0 \end{cases} \quad (5.2)$$

O programa realizou 77 iterações temporais.

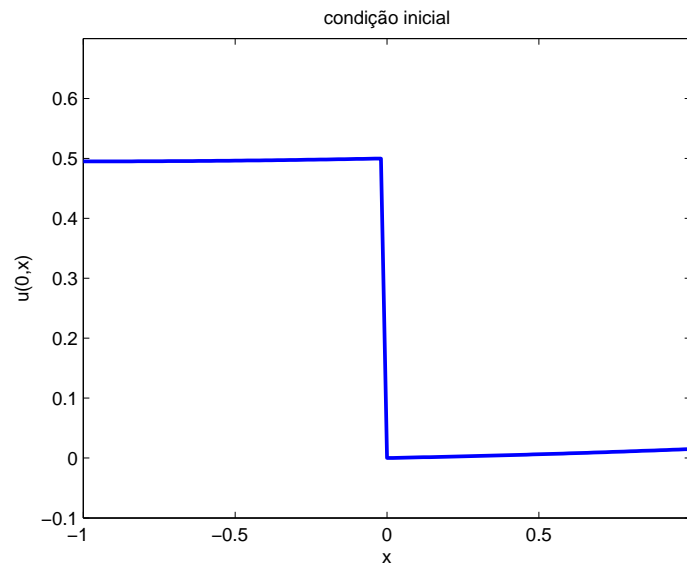


Figura 5.7: Gráfico da condição inicial do PRG - perturbação de ordem  $10^{-2}$ .

A figura 5.7 apresenta o gráfico da condição inicial do problema. Pode-se considerar esta condição inicial como a mesma do exemplo anterior, com uma pequena perturbação da ordem  $10^{-2}$  nos dados do exemplo 1, constituindo um PRG <sup>2</sup>.

---

<sup>2</sup>Problema de Riemann Generalizado.

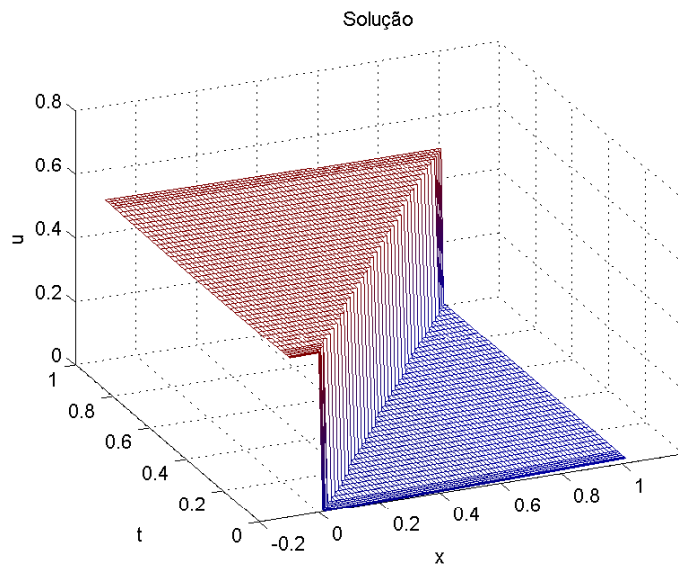


Figura 5.8: Solução numérica em 3D do método assintótico para o PRG - perturbação de ordem  $10^{-2}$ .

A figura 5.8 apresenta o gráfico da solução numérica em 3D, da solução do PRG apresentado. Nota-se que o tamanho do salto é aproximadamente constante ao longo da descontinuidade.

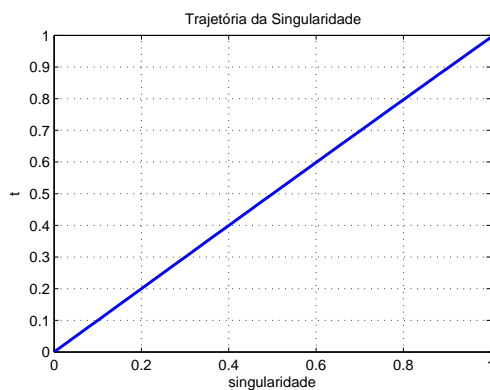


Figura 5.9: Trajetória da singularidade para o PRG - perturbação de ordem  $10^{-2}$ .

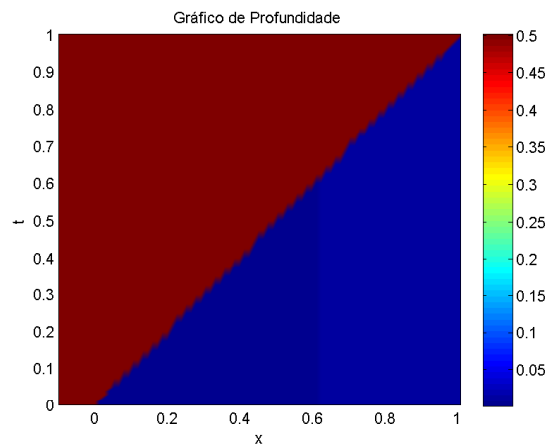


Figura 5.10: Gráfico de profundidade para o PRG - perturbação de ordem  $10^{-2}$ .

A figura 5.9 mostra o gráfico da trajetória do choque conforme o tempo evolui. Nesse caso, a trajetória da singularidade é aproximadamente uma linha reta, por se tratar de um PRG. Pode-se observar através do gráfico em profundidade na figura 5.10 que a altura da descontinuidade é aproximadamente constante.

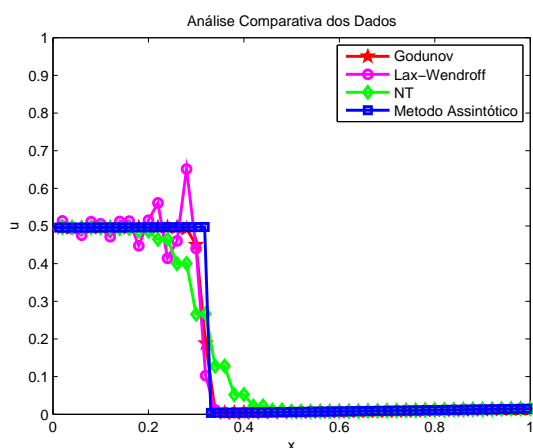


Figura 5.11: Perfis de onda para o PRG - perturbação de ordem  $10^{-2}$ : iteração temporal 48.

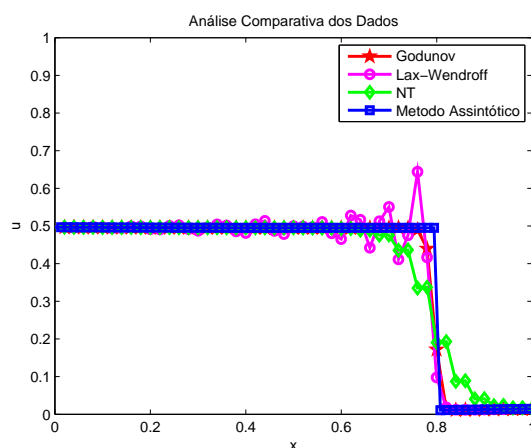


Figura 5.12: Perfis de onda para o PRG - perturbação de ordem  $10^{-2}$ : iteração temporal 67.

As soluções singulares do tipo onda de choque possuem a propriedade de serem estruturalmente estáveis [5]: após uma pequena perturbação nos dados iniciais a solução do problema apresenta apenas uma pequena variação. Isso de fato ocorre no exemplo acima sendo a variação quase imperceptível.

*Observação 5.2:* Observa-se que o comportamento dos perfis permanecem com os mesmos aspectos do exemplo anterior. No caso, o método assintótico é o que melhor capta o choque.

### Exemplo 3

Seja a condição inicial

$$u(0, x) = \begin{cases} 0.5 + \frac{1}{10}x + \frac{1}{20}x^2 & \text{se } x < 0 \\ 0 + \frac{1}{10}x + \frac{1}{20}x^2 & \text{se } x \geq 0 \end{cases} \quad (5.3)$$

O programa realizou 77 iterações temporais.

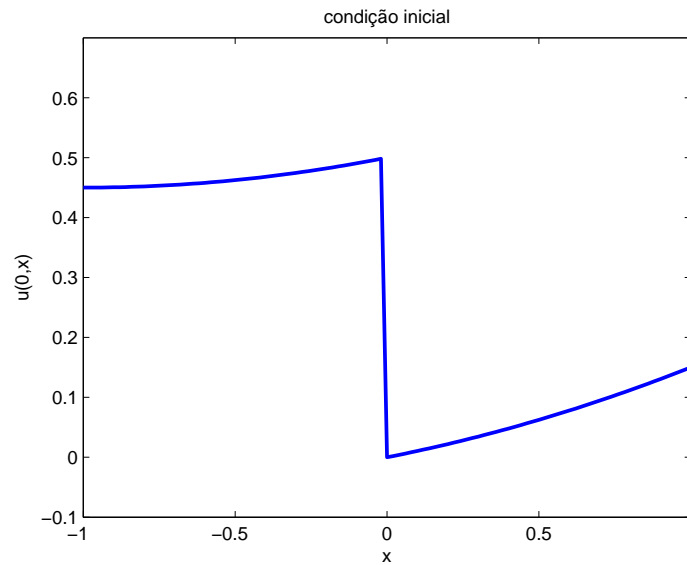


Figura 5.13: Gráfico da condição inicial do PRG - perturbação de ordem  $10^{-1}$ .

Nesse caso, as condições iniciais são formadas por funções polinomiais de segundo grau e podem ser consideradas como uma variação da ordem  $10^{-1}$  dos dados do exemplo 1, tratando-se novamente de um PRG. A seguir serão apresentados os resultados obtidos através de figuras dispostas na mesma ordem do exemplo anterior.

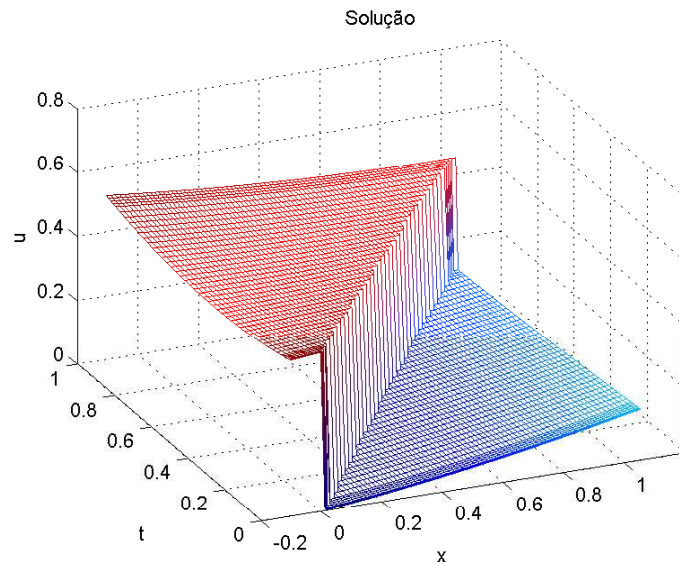


Figura 5.14: Solução numérica em 3D do método assintótico para o PRG - perturbação de ordem  $10^{-1}$ .

Na figura 5.14 podemos observar que, conforme o tempo evolui, o salto ainda pode ser considerado aproximadamente constante devido ao fato da variação no tamanho do

salto ser quase imperceptível, ocorrendo bem ao final da simulação numérica.

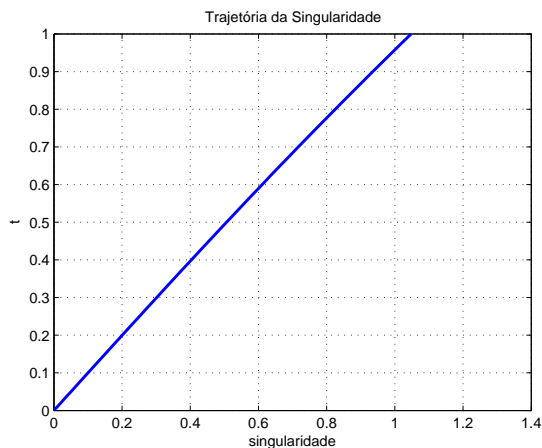


Figura 5.15: Trajetória da singularidade para o PRG - perturbação de ordem  $10^{-1}$ .

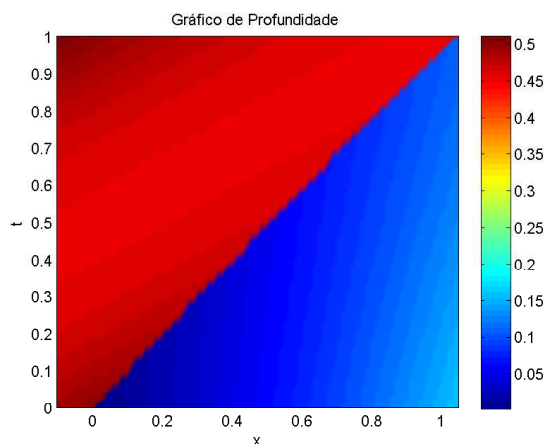


Figura 5.16: Gráfico de profundidade para o PRG - perturbação de ordem  $10^{-1}$ .

Pode-se observar através da figura 5.15 que a trajetória da singularidade é aproximadamente uma linha reta, e observando a figura 5.16 vemos que o tamanho do salto é aproximadamente constante, de modo que os resultados se aproximam dos obtidos anteriormente.

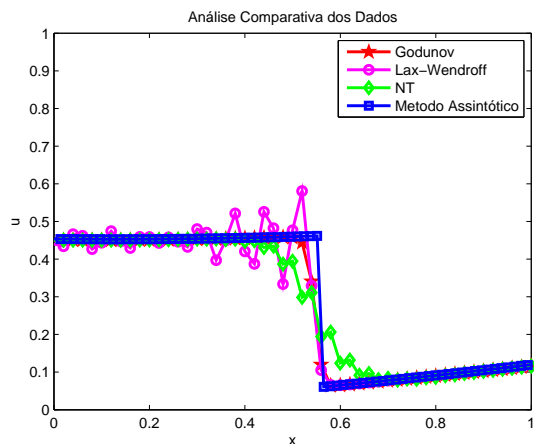


Figura 5.17: Perfis de onda para o PRG - perturbação de ordem  $10^{-1}$ : iteração temporal 48.

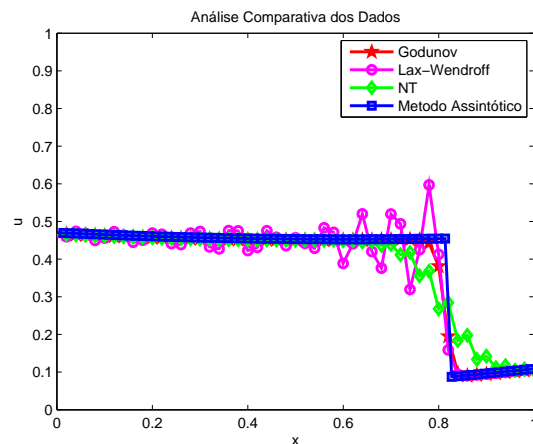


Figura 5.18: Perfis de onda para o PRG - perturbação de ordem  $10^{-1}$ : iteração temporal 67.

*Observação 5.3: Também neste exemplo podemos observar que a solução aproximada é do tipo choque, com base nos resultados obtidos anteriormente, sendo o método assintótico o método que melhor capta o choque.*

**Exemplo 4**

Considere agora a seguinte condição inicial:

$$u(0, x) = \begin{cases} 0.3 - \frac{1}{8}x + \frac{1}{30}x^2 & \text{se } x < 0 \\ 0 + \frac{1}{5}x & \text{se } x \geq 0 \end{cases} \quad (5.4)$$

Foram realizadas 77 iterações temporais.

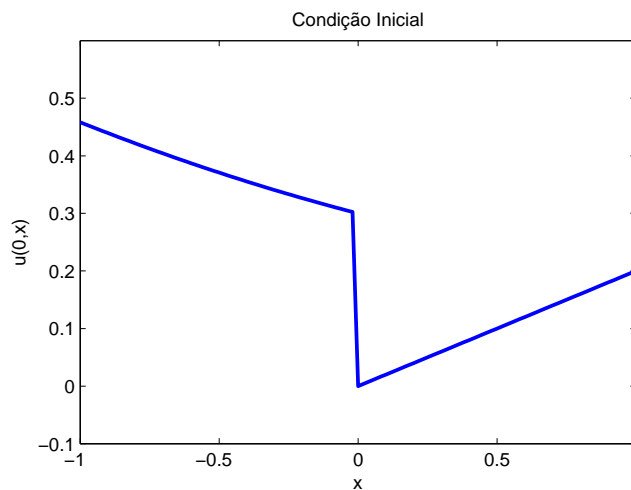


Figura 5.19: Gráfico da condição inicial para o PRG - reta e parábola.

Nesse caso temos um PRG onde as condições iniciais são formadas por funções polinomiais de primeiro e segundo grau (reta e parábola).

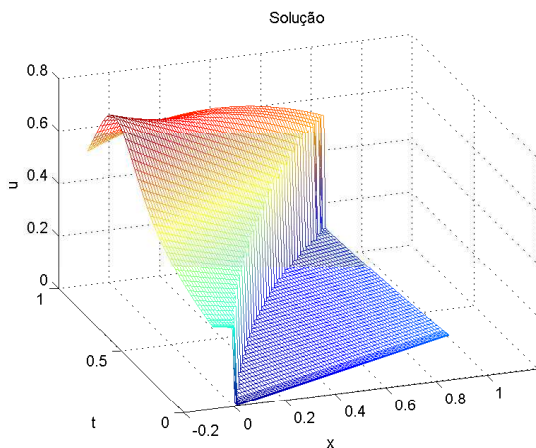


Figura 5.20: Solução numérica em 3D do método assintótico para o PRG - reta e parábola.

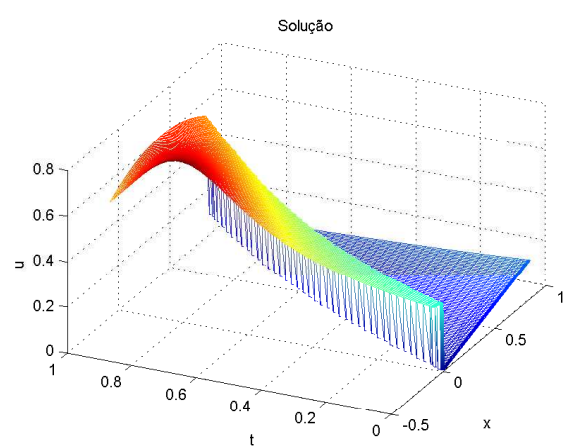


Figura 5.21: Solução numérica em 3D do método assintótico para o PRG - reta e parábola: rotação.

Pode-se observar na figura 5.20 que o salto aumenta de tamanho conforme o tempo



evolui. Na figura 5.21 pode-se observar que esse aumento de salto ocorre próximo à singularidade.

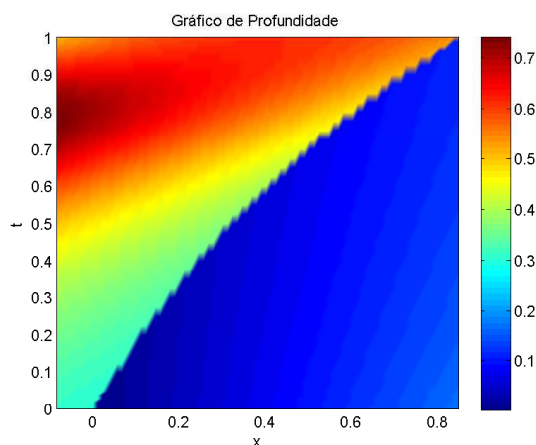
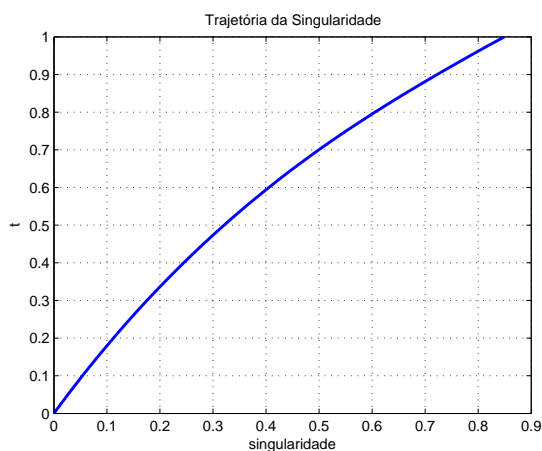


Figura 5.22: Trajetória da singularidade para o PRG - reta e parábola.

Figura 5.23: Gráfico em profundidade para o PRG - reta e parábola.

Pode-se observar através da figura 5.22 que a trajetória da singularidade apresenta um comportamento curvilíneo, aproximadamente parabólico. No gráfico em profundidade apresentado na figura 5.23 pode-se observar que existem variações crescentes para a altura da descontinuidade.

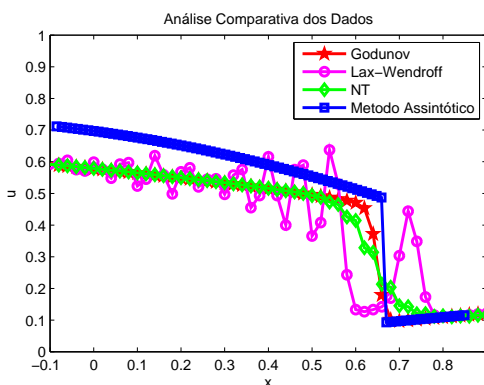
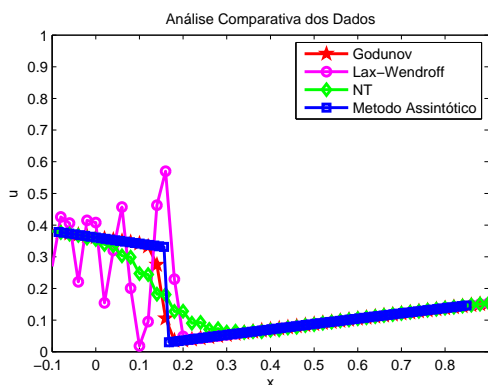


Figura 5.24: Perfis de Onda para o PRG - reta e parábola: iteração temporal 46.

Figura 5.25: Perfis de Onda para o PRG - reta e parábola: iteração temporal 69.

Na figura 5.24 vemos que o método assintótico é o método que melhor capta o choque, no período que ele existe. No entanto, ao observar-se a figura 5.25 a solução parece deixar de ser um choque puro, conforme observamos o excesso difusão próximo à descontinuidade que ocorre no método Godunov.

*Observação 5.4:* Para o tempos pequenos (próximo de 46 iterações), o método assintótico é o método que melhor capta o choque. Para tempos maiores (próximo de 69

iterações), no entanto, o método não capta bem a solução que parece deixar de ser do tipo choque puro. Podemos fazer essa hipótese baseados no Teorema da Fundamentação Teórica pois, se a solução fosse de fato um choque puro, os coeficientes da expansão assintótica captariam esse choque corretamente. No entanto, observando o comportamento da solução obtida com o método Godunov (que é o método de diferenças menos difusivo utilizado neste trabalho), vemos que ocorre um excesso de difusão no perfil de onda, que pode explicar a presença de rarefação adjacente ao choque na solução.

Portanto, num PRG as soluções são mais gerais podendo ocorrer:

- choque apenas por um breve tempo;
- choque com outras estruturas singulares adjacentes;
- soluções compostas por outras estruturas adicionais.

### Exemplo 5

Considere-se agora a seguinte condição inicial:

$$u(0, x) = \begin{cases} 0 - 5x + 2x^2 & \text{se } x < 0 \\ 0.6 + \frac{1}{3}x + \frac{1}{10}x^2 & \text{se } x \geq 0 \end{cases} \quad (5.5)$$

Foram realizadas 113 iterações temporais.

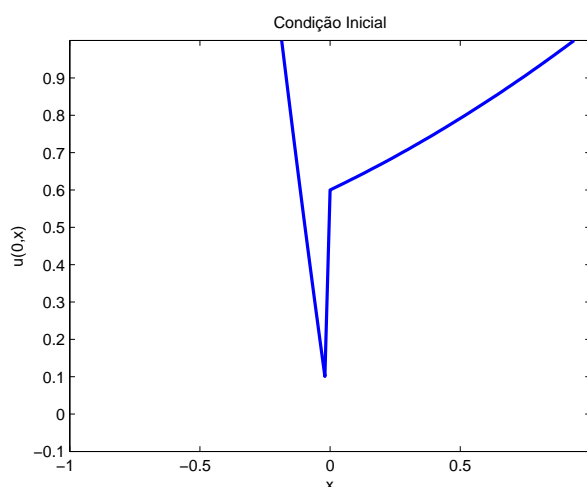


Figura 5.26: Gráfico da condição inicial para o PRG - parábolas.

Os resultados serão mostrados seguindo a mesma ordem dos exemplos anteriores.

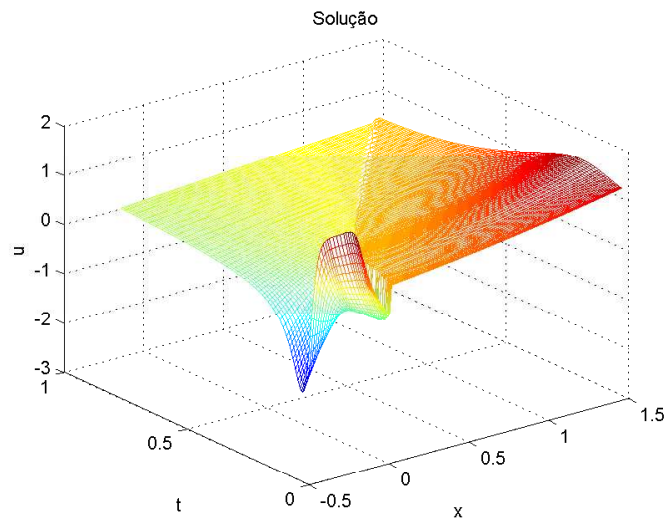


Figura 5.27: *Solução numérica em 3D do método assintótico para o PRG - parábolas.*

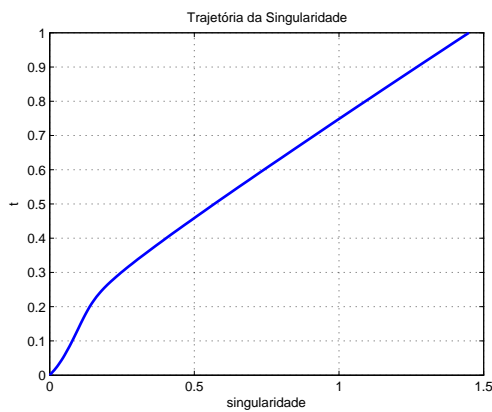


Figura 5.28: *Gráfico da trajetória da singularidade para o PRG - parábolas.*

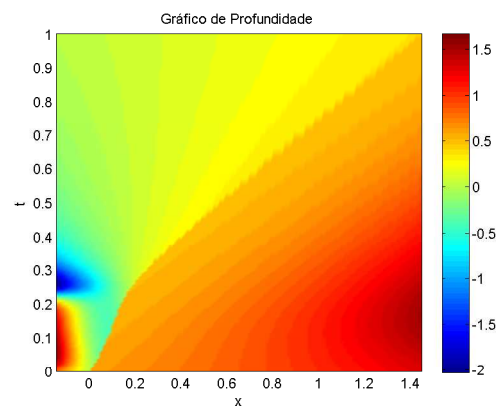


Figura 5.29: *Gráfico de profundidade para o PRG - parábolas.*

Pode-se perceber pela figura 5.28 que a trajetória da singularidade é formada por uma curva desconhecida. Observa-se através da figura 5.29 que existem variações na altura da descontinuidade que ocorrem próximo e longe da singularidade.

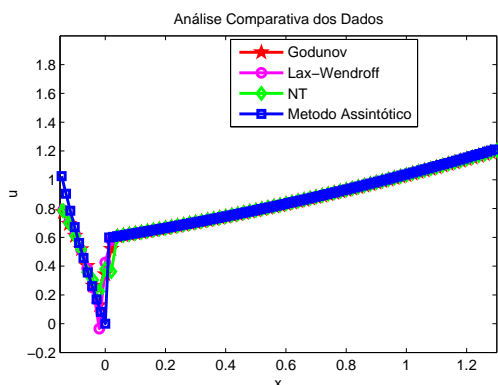


Figura 5.30: Gráfico dos perfis de onda para o PRG - parábolas: iteração temporal 33.

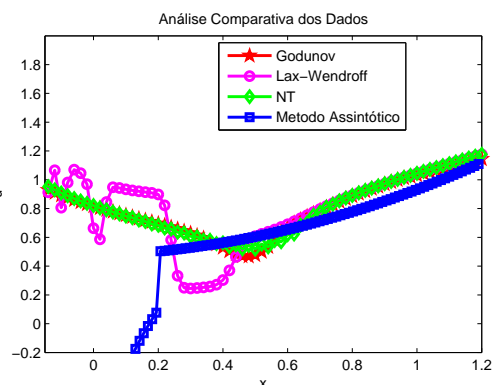


Figura 5.31: Gráfico dos perfis de onda para o PRG - parábolas: iteração temporal 67.

*Observação 5.5:* Neste exemplo pode-se observar que a solução é do tipo choque (mas não podemos afirmar que seja do tipo choque puro) apenas inicialmente (por volta de 33 iterações temporais) como vemos na figura 5.30. No entanto a solução deixa de ser claramente do tipo choque conforme o tempo evolui (por volta de 67 iterações temporais). Isso pode ser observado devido a suavização das ondas obtidas com os métodos de diferenças finitas, que deixam de ter uma descontinuidade. No entanto, dada a natureza do método assintótico, ele força a existência de uma solução do tipo choque devido a sua implementação feita para a captação específica para este tipo de solução.

## 5.2 Comparação com o Fluxo Aproximado por Série de Maclaurin

A seguir, serão feitas comparações entre o método assintótico com o fluxo de B-L (equação (2.26)) e com o mesmo método com fluxo aproximado por série de Maclaurin, a saber:

$$f(u) = 2u + 6u^2 \quad (5.6)$$

de grau 2 ( $N=2$ ),

$$f(u) = 2u + 6u^2 + 8u^3 - 24u^5 - 56u^6 \quad (5.7)$$

de grau 6 ( $N=6$ ) e

$$f(u) = 2u + 6u^2 + 8u^3 - 24u^5 - 56u^6 - 64u^7 + 160u^9 + 352u^{10} + 384u^{11} \quad (5.8)$$

de grau 11 ( $N=11$ ).

Detalhes sobre a programação do método com o fluxo aproximado podem ser vistos em [5].

### Exemplo 6

A seguir será feita novamente uma simulação com condição inicial de Riemann clássica dada por

$$u(0, x) = \begin{cases} 0.3 & \text{se } x < 0 \\ 0 & \text{se } x \geq 0 \end{cases} \quad (5.9)$$

Foram realizadas 105 iterações temporais.

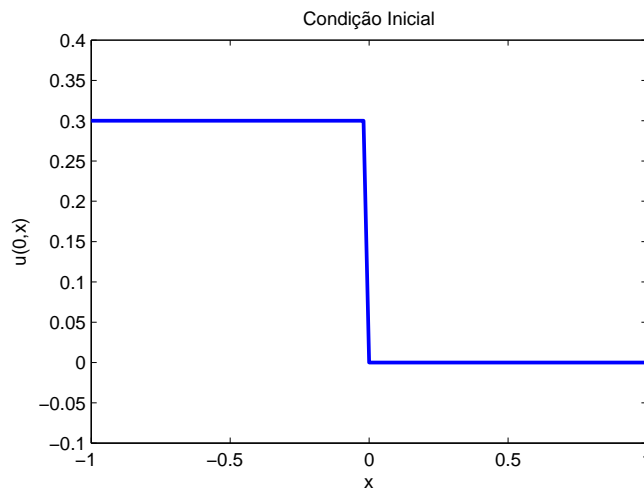


Figura 5.32: Gráfico da condição inicial para o problema de Riemann - aproximação polinomial.

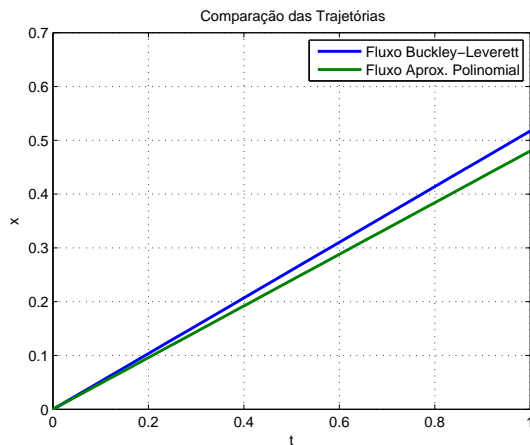


Figura 5.33: Gráfico da comparação entre as trajetórias da singularidade para o problema de Riemann,  $N=2$ .

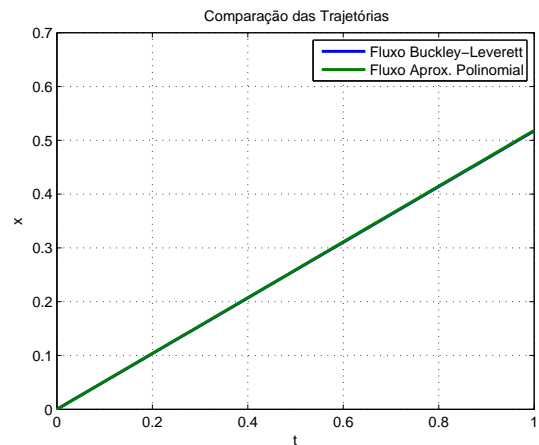


Figura 5.34: Gráfico da comparação entre as trajetórias da singularidade para o problema de Riemann,  $N=6$ .

Conforme aumentou-se o grau de aproximação do polinômio, o resultado com o fluxo aproximado foi melhor. A escolha do grau de aproximação foi feita por meio de tentativas, variando o grau nas ordens 2 a 9, para este exemplo.

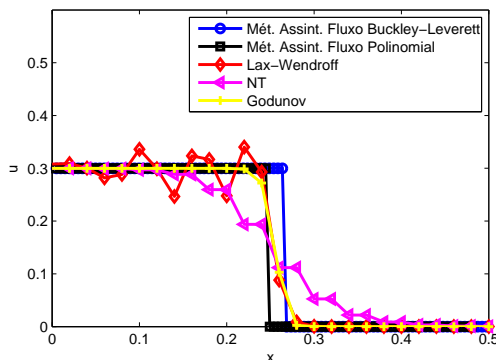


Figura 5.35: Gráfico dos perfis de onda para o problema de Riemann -  $N=2$ : iteração temporal 78.

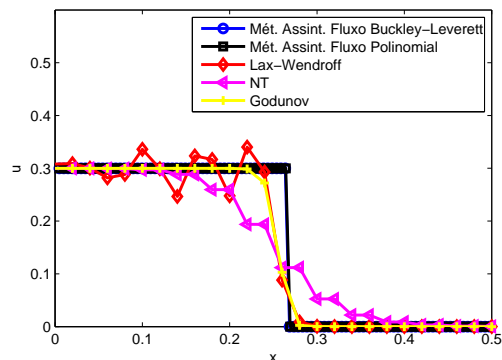


Figura 5.36: Gráfico dos perfis de onda para o problema de Riemann -  $N=6$ : iteração temporal 78.

*Observação 5.6:* Observa-se que os dois métodos assintóticos captam melhor o choque e possuem uma excelente aproximação um do outro (vemos na figura 5.36 que os perfis de onda dos métodos assintóticos aparecem sobrepostos). Os resultados obtidos comprovam a eficiência dos métodos assintóticos que possuem o resultado esperado conforme [5]. O método assintótico com aproximação em série de Maclaurin pode ser aplicado desde que a função de fluxo seja suave, podendo, portanto, ser adaptado para funções compostas por outros fluxos com maior facilidade.

**Exemplo 7**

Considere agora a seguinte condição inicial:

$$u(0, x) = \begin{cases} 0.3 - \frac{1}{8}x + \frac{1}{30}x^2 & \text{se } x < 0 \\ 0 + \frac{1}{5}x & \text{se } x \geq 0 \end{cases} \quad (5.10)$$

Foram realizadas 105 iterações temporais.

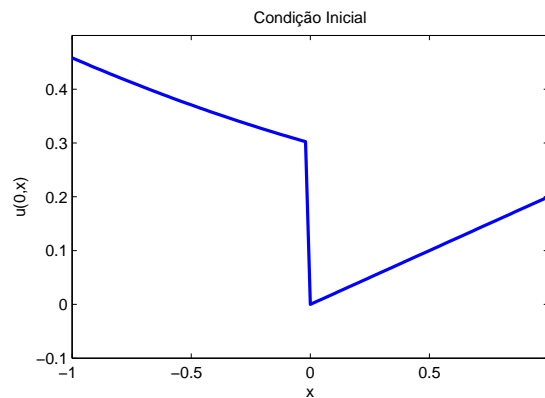


Figura 5.37: Gráfico da condição inicial para o PRG - aproximação polinomial.

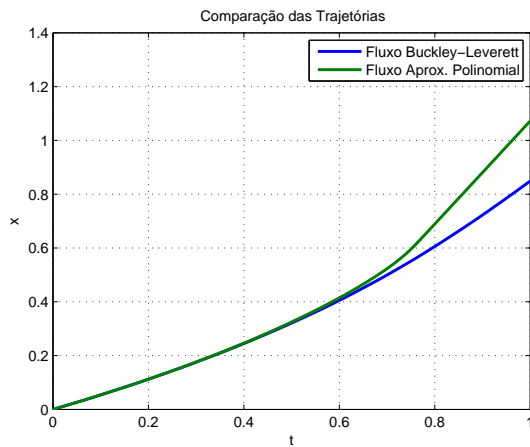


Figura 5.38: Comparação das trajetórias PRG - aproximação polinomial,  $N=6$ .

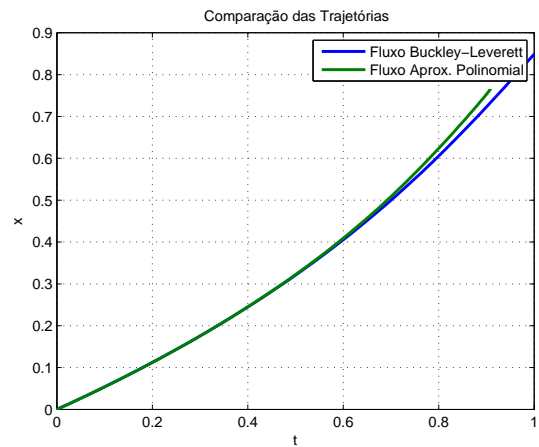


Figura 5.39: Comparação das trajetórias PRG - aproximação polinomial,  $N=11$ .

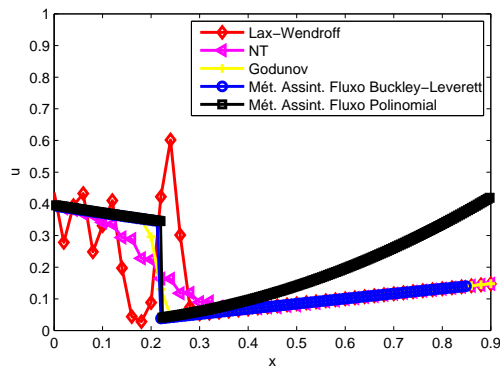


Figura 5.40: Gráfico dos perfis de onda para o PRG -  $N=6$ : iteração temporal 78.

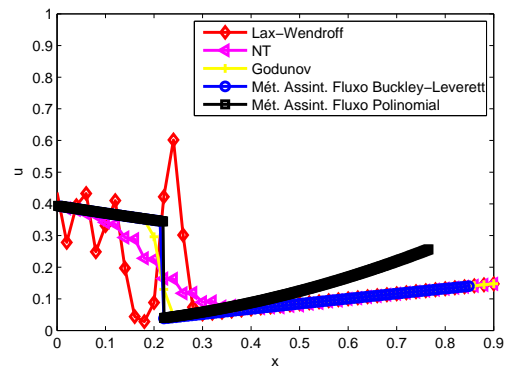


Figura 5.41: Gráfico dos perfis de onda para o PRG -  $N=11$ : iteração temporal 78.

*Observação 5.7:* Observa-se que mesmo para uma aproximação ainda maior para o fluxo em série de Maclaurin, os resultados do método assintótico com o fluxo aproximado não foram coincidentes ao resultado do mesmo método com o fluxo em sua forma normal. Isso indica que, para alguns casos, o método assintótico que usa o fluxo aproximado pode não funcionar corretamente, necessitando ordens muito grandes de aproximação.



## 5.3 Análise de Complexidade

De acordo com [19], a complexidade de um algoritmo consiste na quantidade de trabalho necessário para a sua execução que varia de acordo com o algoritmo e o volume de dados envolvidos. Nesta seção será aplicada a complexidade temporal de pior caso  $O(n)$  para os exemplos 1, 2, 3 e 4 com o domínio sendo discretizado por 100, 200, 300, 400 e 500 pontos, analisando o método Assintótico de Maslov para o fluxo de B-L desenvolvido neste trabalho, juntamente com os métodos de diferenças finitas Lax-Wendroff, NT e Godunov. Para cada exemplo serão apresentadas tabelas contendo os polinômios de complexidade de cada algoritmo usando a função **polyfit** do MATLAB®. Em cada caso a seguir, o método que consome menor tempo de processamento possui menor valor no coeficiente de primeiro grau dos polinômios de complexidade apresentados nas tabelas. O tempo de processamento em cada caso é dado pelo tempo total de CPU (em segundos) obtido à partir do momento em que se inicia a simulação através do comando **cputime** do MATLAB®.

### Análise de Complexidade do Exemplo 1

Métodos	Polinômio de Complexidade
Assintótico	$O(n) = 0.0110n + 1.0795$
Lax-Wendroff	$O(n) = 0.0008n + 0.01154$
NT	$O(n) = 0.1595n - 4.8546$
Godunov	$O(n) = 0.0799n - 3.2055$

Tabela 5.1: Polinômios de complexidade dos métodos Assintótico com fluxo de B-L, Lax-Wendroff, NT e Godunov para o exemplo 1.

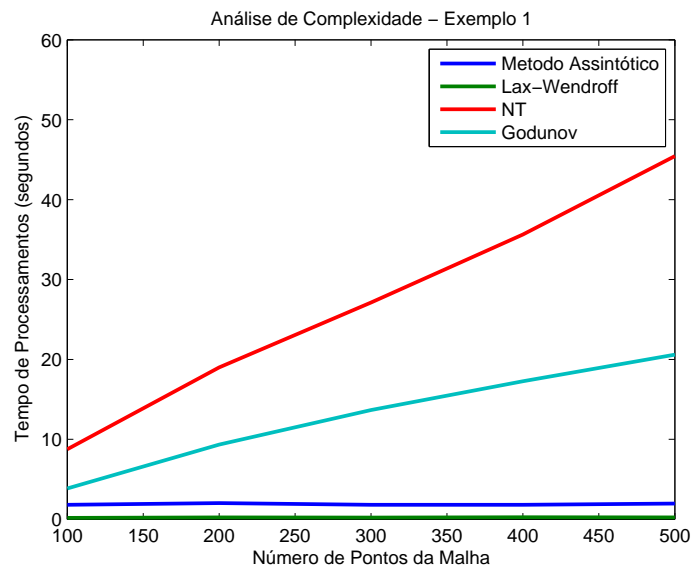


Figura 5.42: Gráficos de complexidade dos métodos Assintótico, Lax-Wendroff, NT e Godunov para o exemplo 1.

### Análise de Complexidade do Exemplo 2

Métodos	Polinômio de Complexidade
Assintótico	$O(n) = 0.0031n + 1.5589$
Lax-Wendroff	$O(n) = 0.0001n + 0.1934$
NT	$O(n) = 0.0912n + 0.3558$
Godunov	$O(n) = 0.0421n - 0.3743$

Tabela 5.2: Polinômios de complexidade dos métodos Assintótico com fluxo de B-L, Lax-Wendroff, NT e Godunov para o exemplo 2.

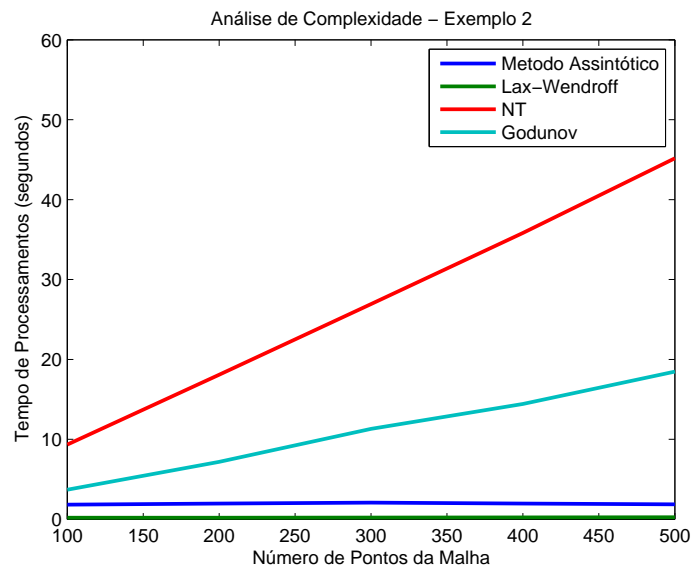


Figura 5.43: Gráficos de complexidade dos métodos Assintótico, Lax-Wendroff, NT e Godunov para o exemplo 2.

### Análise de Complexidade do Exemplo 3

Métodos	Polinômio de Complexidade
Assintótico	$O(n) = 0.0084n + 1.1263$
Lax-Wendroff	$O(n) = 0.0014n + 0.0780$
NT	$O(n) = 0.0636n + 1.6382$
Godunov	$O(n) = 0.0341n + 0.5458$

Tabela 5.3: Polinômios de complexidade dos métodos Assintótico com fluxo de B-L, Lax-Wendroff, NT e Godunov para o exemplo 3.

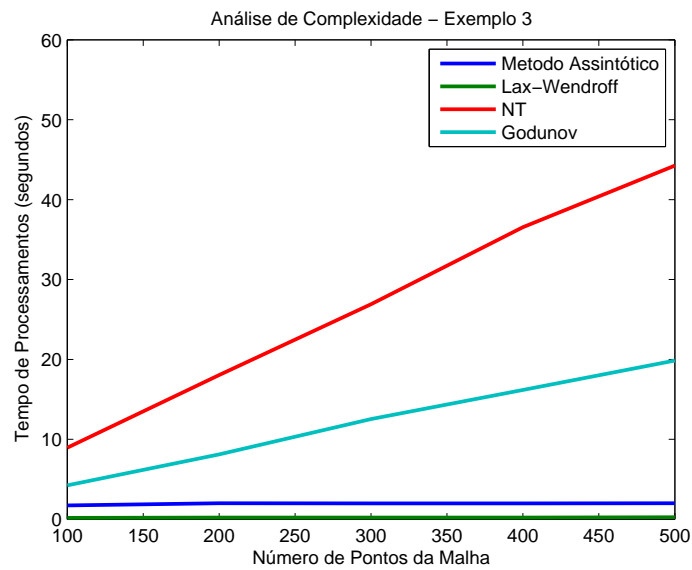


Figura 5.44: Gráficos de complexidade dos métodos Assintótico, Lax-Wendroff, NT e Godunov para o exemplo 3.

#### Análise de Complexidade do Exemplo 4

Métodos	Polinômio de Complexidade
Assintótico	$O(n) = 0.0093n + 1.2230$
Lax-Wendroff	$O(n) = 0.0003n + 0.2371$
NT	$O(n) = 0.0979n - 0.1405$
Godunov	$O(n) = 0.0244n + 1.5036$

Tabela 5.4: Polinômios de complexidade dos métodos Assintótico com fluxo de B-L, Lax-Wendroff, NT e Godunov para o exemplo 4.

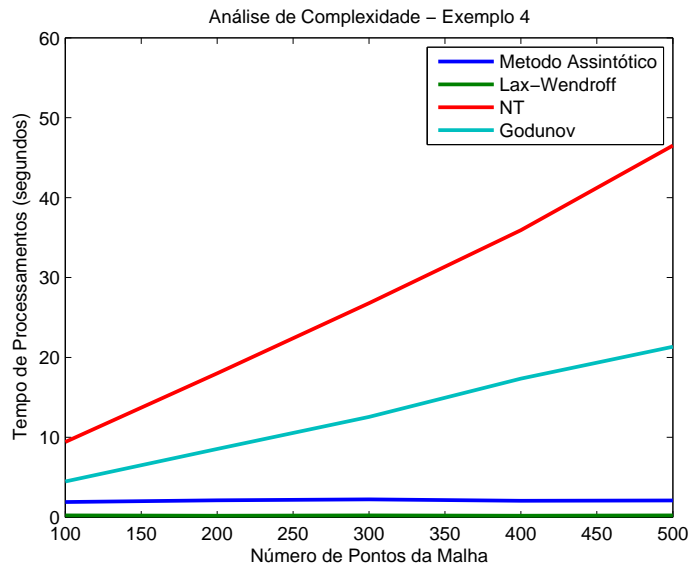


Figura 5.45: Gráficos de complexidade dos métodos Assintótico, Lax-Wendroff, NT e Godunov para o exemplo 4.

Observando os resultados acima concluímos que os métodos Lax-Wendroff e Assintótico são os que obtiveram menor valor nos coeficientes de primeiro grau sendo os métodos que consomem menor tempo de processamento. No entanto, conforme visto na seção 5.2, os perfis obtidos com o método assintótico não apresentam erros numéricos de dispersão como os obtidos através da aplicação do método Lax-Wendroff. Deste modo podemos concluir que o método Assintótico é o método mais eficiente na captura do choque nos casos em que ele existe.

# Capítulo 6

## Conclusões

### 6.1 Conclusões

Foi possível encontrar a cadeia de Hugoniot-Maslov para as ondas de choque como solução da equação de B-L sendo truncada para a obtenção do sistema de EDO's, que foi resolvido computacionalmente, conforme os primeiros objetivos propostos. Esta etapa foi considerada a mais complexa do desenvolvimento do trabalho, pois observou-se que erros cometidos nos cálculos iniciais ao se propagarem produziam uma solução completamente diferente na aplicação numérica do método.

A partir da comparação das soluções dos exemplos propostos entre o método assintótico com os métodos clássicos de diferenças finitas (Godunov, Lax-Wendroff e NT), concluímos que:

- Os métodos assintóticos, quando comprovada a existência de solução do tipo onda de choque, apresentam a solução numérica mais próxima da solução exata em equações conservativas [5]. Esses métodos captam as ondas de choque sem que apresentem difusão ou dispersão numérica [20]. Portanto, no que diz respeito ao problema de Riemann o método assintótico desenvolvido para o fluxo de B-L surge como uma alternativa aos métodos de diferenças finitas. Isso também pode ser comprovado através da análise de complexidade na seção 5.3 que mostrou o baixo custo computacional do método em relação ao tempo de processamento. Nesse caso, observa-se que para os exemplos 1, 2, 3 e 6 o método assintótico para o fluxo de B-L teve um bom funcionamento mas, no entanto, diferentemente dos métodos de diferenças finitas que resolvem o problema independentemente do tipo de solução, o método

assintótico busca captar soluções específicas do tipo ondas de choque.

- Porém quando se trata de um PRG, na sua forma atual, em alguns exemplos o funcionamento do método assintótico foi razoável (exemplos 4, 5 e 7). No entanto, esse resultado era esperado, pois o método foi desenvolvido apenas para a captação de ondas de choque. Além disso, não se sabe ao certo que tipo de soluções poderiam ser encontradas em um PRG.

Através da comparação das soluções dos exemplos propostos entre o método assintótico com fluxos de B-L com o mesmo método com o fluxo aproximado por um polinômio, conclui-se:

- Houve a validação dos resultados presentes em [5] para a equação de Buckley-Leverett, sendo uma forma alternativa para o uso do método quando as aproximações do fluxo forem suficientes (exemplo 6).
- No entanto, deve ser levar em conta que dependendo do problema, existe a necessidade de uma ordem grande de aproximação do fluxo (exemplo 7).

Além disso, o método pode ser utilizado como ferramenta para a verificação do comportamento das descontinuidades que ocorrem na equação de B-L, o que permite avaliar, ainda, a existência (ou não) de choque num problema. O método ainda permite ter uma ideia do comportamento da solução em que outras estruturas singulares adicionais ocorrem.

## 6.2 Trabalhos Futuros

Propomos o estudo de dois tópicos que possam dar continuidade ao trabalho desenvolvido. O primeiro trata-se da aplicação do método estudado para outras equações conservativas e para outros tipos de soluções singulares, tais como ondas de rarefações e soluções singulares do tipo vorticial. O segundo, seria, encontrar uma maneira de estender a aplicação do método quando estruturas adicionais aparecem na solução (como por exemplo rarefações na equação de B-L).

# Referências

- [1] Randall J. LeVeque. *Numerical Methods for Conservation Laws*. Birkhauser Verlag, 2 edition, 1992.
- [2] Pedro Junior Zucatelli. *Análise do Potencial Técnico do Sequestro Geológico de CO<sub>2</sub> na Bacia do Espírito Santo ONSHORE e OFFSHORE*. Universidade Federal do Espírito Santo, 2015.
- [3] Dietmar Kroner. *Numerical Schemes for Conservation Laws*. Wiley Teubner, 1997.
- [4] José Alberto Culminato and Messias Meneguette Junior. *Discretização de Equações Diferenciais Parciais: Técnica de Diferenças Finitas*. Sociedade Brasileira de Matemática, 1<sup>a</sup> edition, 2013.
- [5] P. Rodriguez-Bermudez. *Cadenas de Hugoniot-Maslov para una ecuación de Ley de Conservación con flujo polinomial*. Universidad de La Habana, 2005.
- [6] Jean François Colombeau. *Elementary Introduction to New Generalized Functions*. North Holland Math, 1985.
- [7] Victor Pavlovich Maslov. *Propagación de las ondas de choque en un gas isoentrópico no viscoso*. En Itogui Naúki i Téjnik, 1977.
- [8] V. G. Danilov and G. A. Omelyanov. *Truncation of a Chain Hugoniot-Type conditions for shocks waves and its justification for the Hopf equation*. E. Schron diger Inst. for Math. Phys., 1997.
- [9] V. V. Bulatov, S. Yu Dobrokhotov, Yu V. Danilov, and V. G. Danilov. *Hugoniot and Maslov Chains of Solitary Vortex Solutions to Equations of Shallow Water, the Hill Equation, and Trajectories of a "Typhoon eye"*. Proceedings of the Int. Conf. Asymtotic Methods in Mechanics, 1997.
- [10] P. Rodriguez-Bermudez and Baldomero Valiño Alonso. *Hugoniot-maslov chains of shock wave in conservation law with polynomial flow*. *Mathematische Nachrichten*, 280:907–915, 2007.
- [11] Zhangxin Chen, Guanren Huan, and Yuanle Ma. *Computational Methods for Multiphase Flows in Porous Media*. Southern Methodist University, 2006.
- [12] Baldomero Valiño Alonso. *Minicurso leis de conservação*. [www.uff.br/mcct](http://www.uff.br/mcct), 2014.
- [13] Jean François Colombeau. *New Generalized Functions and Multiplications of Distributions*. North Holland Math, 1984.
- [14] Jean François Colombeau. *Multiplications of Distributions*. Springer Verlag, 1992.



- 
- [15] Sergei Lvovich Sobolev. *Méthode nouvelle à résoudre le problème de Cauchy pour les équations linéaires hyperboliques normales*. jour Rec. Math. [Mat. Sbornik] N.S., 1936.
- [16] Laurent Schwartz. *Théorie des distributions*. Hermann, 1966.
- [17] James Stewart. *Cálculo - Volume II*. Cengage Learning, 6<sup>a</sup> edition, 2012.
- [18] Phoolan Prasad and Renuka Ravindra. A new theory of shock dynamics, part ii: Numerical solution. *App. Math Lett*, 3:107–109, 1990.
- [19] Marco Antonio de Oliveira Coelho. *Métodos Iterativos para Resolver Sistemas de Equações Algébricas Lineares em Estruturas Esparsas*. Universidade Federal Fluminense, 2015.
- [20] Edmundo Capelas de Oliveira and Martin Tygel. *Métodos Matemáticos para Engenharia*. Sociedade Brasileira de Matemática, 2<sup>a</sup> edition, 2010.
- [21] Valéria Magalhães Iório. *EDP Um Curso de Graduação*. Coleção Matemática Universitária, 2010.
- [22] Vinícios Carvalho Rispoli. *Estudo Analítico e Numérico de um Modelo para Escoamento Trifásico*. Universidade de Brasília, 2007.
- [23] Amilton Ferreira da Silva Junior. *Método dos Volumes Finitos para Equação de Convecção e Difusão em uma Dimensão Espacial*. Universidade Federal Fluminense, 2012.

## APÊNDICE A - Apêndice

### A.1 Programa Principal

A seguir serão apresentados os programas feitos na linguagem de programação do software MATLAB® utilizados para encontrar a solução numérica do problemas apresentados no capítulo 5.

```

1
2 clear all;clc; close all;
3
4 %CONDICOES INICIAIS
5
6 %mi=1.0;      %razao entre as viscosidades
7
8 u_l=0.3;
9 u_r=0;
10 D1u_l=-1/8;
11 D2u_l=2/30;
12 D1u_r=1/5;
13 D2u_r=0;
14
15 %yo=[X(0)=0; A0=u_l(0); A1(0)=u'_l(0)/2 A2(0)=u''_l(0)/2; B0=u_r
      (0)-u_l(0); B1=u'_r(0)-u'_l(0); B2=(u''_r(0)-u''_l(0))/2];
16
17 yo=[0 u_l D1u_l (D2u_l)/2 u_r-u_l D1u_r-D1u_l (D2u_r-D2u_l)/2];
18
19 %tspan=[to tf] sao os limites de integracao
20

```

```
21 tspan=[0 1];
22
23 %Passo inicial
24
25 passo=odeset('InitialStep', 0.0000001);
26
27
28 %RESOLUCAO DO SISTEMA DE EDO's
29
30 %y=[X';A'0;A'1;A'2;B'0;B'1;B'2;]
31
32 [t,y]=ode45(@cadeias,tspan,yo,passo);
33
34 %Trajetoria do choque
35
36 tra=zeros(length(t),1);
37 tra=y(:,1);
38 figure(3)
39 set(3,'name','trajetoria singularidade')
40 plot(t,tra,'b','linewidth',2)
41 title('Trajetoria da Singularidade')
42 xlabel('t')
43 ylabel('x')
44 grid on
45
46
47 x=zeros(length(t),1);
48 x=tra;
49
50 %Construcao da solucao
51
52 if x(length(t))~=0
53     x1=linspace(0,x(length(t)),length(t));
54 else
55     x1=linspace(0,t(length(t)),length(t));
```

```
56 end
57
58 xaux=linspace(-x(length(t))/10,0,round(length(t)/10));
59 XX=[xaux(1:length(xaux)-1) x1];
60 x1=XX;
61
62 u=zeros(length(t),length(t));
63
64 for i=1:length(t)
65     for j=1:length(x1)
66         p=x1(j)-x(i);
67         c=p^2;
68         if x1(j)>x(i)
69             u(i,j)=y(i,2)+y(i,3)*p+y(i,4)*c+y(i,5)+y(i,6)*p+y(i
70                 ,7)*c;
71         else
72             u(i,j)=y(i,2)+y(i,3)*p+y(i,4)*c;
73         end
74     end
75 end
76 figure(2)
77 set(2,'name',' Grafico 3D da Solucao')
78 mesh(x1,t,u)
79 title('Solucao')
80 shading interp;
81 colormap;
82 xlabel('x')
83 ylabel('t')
84 zlabel('u')
85
86 figure(4)
87 set(4,'name',' Grafico de Profundidade')
88 pcolor(x1,t,u)
89 title(' Grafico de Profundidade')
```

```
90 shading interp;
91 colormap;
92 xlabel( 'x' )
93 ylabel( 't' )
94 zlabel( 'u' )
95
96 [m,n]=size(u);
97
98 m
99
100 % Analise Comparativa dos Perfis de Onda
101
102 [x_2,u_2]=laxwendroff(t(floor(3*m/10)));
103 [x_4,u_4]=nt(t(floor(3*m/10)));
104 [x_5,u_5]=metgodunov(t(floor(3*m/10)));
105
106 figure(5)
107 set(5,'name','Comparacao dos Perfis de Onda')
108 plot(x_5,u_5,'r-p',x_2,u_2,'m-o',x_4,u_4,'g-d',x1,u(floor(3*m
    /10),:),'b-s','linewidth',2)
109 axis( [-0.15 1.2 0 1.8] );
110 hold on
111 title('Analise Comparativa dos Dados')
112 ylabel('u')
113 xlabel('x')
114 legend('Godunov','Lax-Wendroff','NT','Metodo Assintotico')
115
116 floor(3*m/10)
117
118 [x_2,u_2]=laxwendroff(t(floor(6*m/10)));
119 [x_4,u_4]=nt(t(floor(6*m/10)));
120 [x_5,u_5]=metgodunov(t(floor(6*m/10)));
121
122 figure(6)
123 set(6,'name','Comparacao dos Perfis - 2')
```

```
124 plot(x_5,u_5,'r-p',x_2,u_2,'m-o',x_4,u_4,'g-d',x1,u(floor(6*m
    /10),:),'b-s','linewidth',2)
125 axis([ -0.15 1.2 0 1.8 ] );
126 hold on
127 title('Analise Comparativa dos Dados')
128 ylabel('u')
129 xlabel('x')
130 legend('Godunov','Lax-Wendroff','NT','Metodo Assintotico')
131
132 floor(6*m/10)
133
134 [x_2,u_2]=laxwendroff(t(floor(9*m/10)));
135 [x_4,u_4]=nt(t(floor(9*m/10)));
136 [x_5,u_5]=metgodunov(t(floor(9*m/10)));
137
138 figure(7)
139 set(7,'name','Comparacao dos Perfis - Mais Iteracoes')
140 plot(x_5,u_5,'r-p',x_2,u_2,'m-o',x_4,u_4,'g-d',x1,u(floor(9*m
    /10),:),'b-s','linewidth',2)
141 axis([ -0.15 1.2 0 1.8 ] );
142 hold on
143 title('Analise Comparativa dos Dados')
144 ylabel('u')
145 xlabel('x')
146 legend('Godunov','Lax-Wendroff','NT','Metodo Assintotico')
147
148 floor(9*m/10)
```

## A.2 Cadeia Truncada

```

1 function F=cadeias(t,y)
2
3
4 mi=1.0;
5
6 %X'
7 a=(y(2)^2)+2*y(2)*y(5)+(y(5)^2);
8
9 b=y(5)*(mi-2*mi*(y(2)+y(5))+(2+2*mi)*y(2)*y(5)+(1+mi)*(y(2)^2+y
    (5)^2));
10
11 c=(y(2)^2);
12
13 d=y(5)*(mi-2*mi*y(2)+(1+mi)*(y(2)^2));
14
15 %
16 F(1)=(a/b)-(c/d);
17
18
19
20 %A0'
21 e=2*mi*y(2)*y(3)-2*mi*(y(2)^2)*y(3);
22
23 f=(mi^2)-4*(mi^2)*y(2)+(6*(mi^2)+2*mi)*(y(2)^2)+...
24 -(4*(mi^2)+4*mi)*(y(2)^3)+((mi^2)+2*mi+1)*(y(2)^4);
25
26 %
27 F(2)=y(3)*((a/b)-(c/d))-(e/f);
28
29 %A1'
30 g=2*mi*((y(3)^2)+2*y(2)*y(4))-2*mi*(2*y(2)*(y(3)^2)+2*(y(2)^2)*y
    (4));
31
32 h=-4*(mi^2)*y(3)+(12*(mi^2)+4*mi)*y(2)*y(3)-(4*(mi^2)+4*mi)*3*(y

```

```

(2)^2)*y(3) + ...
33     +((mi^2)+2*mi+1)*4*(y(2)^3)*y(3);
34
35 %
36 F(3)=2*y(4)*((a/b)-(c/d))+(e*h-g*f)/(f^2);
37
38
39
40
41 %A2'
42 k=2*mi*3*y(3)*y(4)-2*mi*(6*y(2)*y(3)*y(4)+(y(3)^3));
43
44 l=-4*(mi^2)*y(4)+(6*(mi^2)+2*mi)*(2*y(2)*y(4)+(y(3)^2))+...
45     -(4*(mi^2)+4*mi)*(3*(y(2)^2)*y(4)+3*y(2)*(y(3)^2))+...
46     +((mi^2)+2*mi+1)*(4*(y(2)^3)*y(4)+6*((y(2)^2)*(y(3)^2)));
47
48 %
49 F(4)=(e*f*l-e*(h^2)+g*f*h-k*(f^2))/(f^3);
50
51 %
52 %
53 %B's
54
55 m=(mi^2)-4*(mi^2)*(y(2)+y(5))+(2*mi+6*(mi^2))*((y(2)^2)+(y(5)^2)
56     )+...
57     -(4*mi+4*(mi^2))*((y(2)^3)+(y(5)^3))+((mi)^2+2*mi+1)*((y(2)
58     ^4)+(y(5)^4))+...
59     +(4*mi+12*(mi^2))*y(2)*y(5)-(12*mi+12*(mi^2))*((y(2)^2)*y(5)
60     +y(2)*(y(5)^2))+...
61     +(4+8*mi+4*(mi^2))*((y(2)^3)*y(5)+y(2)*(y(5)^3))+...
62     +(6+12*mi+6*(mi^2))*(y(2)^2)*(y(5)^2);
63
64 s=(mi^2)-4*(mi^2)*y(2)+(2*mi+6*(mi^2))*(y(2)^2)+...
65     -(4*mi+4*(mi^2))*(y(2)^3)+(1+2*mi+(mi^2))*(y(2)^4);
66

```



```

64 p=2*mi*(y(2)*y(3)+y(2)*y(6)+y(5)*y(3)+y(5)*y(6))+...
65     -2*mi*((y(2)^2)*y(3)+(y(5)^2)*y(3)+(y(2)^2)*y(6)+(y(5)^2)*y
66         (6))+...
67     -4*mi*(y(2)*y(5)*y(3)+y(2)*y(5)*y(6));
68
69
70 %
71 %B0'
72
73 F(5)=y(6)*((a/b)-(c/d))-(p/m)-(v/s);
74
75
76
77 n=-4*(mi^2)*(y(3)+y(6))+(2*mi+6*(mi^2))*(2*y(2)*y(3)+2*y(5)*y(6)
78     )+...
79     -(4*mi+4*(mi^2))*(3*(y(2)^2)*y(3)+3*(y(5)^2)*y(6))+...
80     +((mi)^2+2*mi+1)*(4*(y(2)^3)*y(3)+4*(y(5)^3)*y(6))+...
81     +(4*mi+12*(mi^2))*(y(3)*y(5)+y(2)*y(6))+...
82     -(12*mi+12*(mi^2))*(2*y(2)*y(3)*y(5)+(y(2)^2)*y(6)+2*y(5)*y(6)
83         *y(2)+(y(5)^2)*y(3))+...
84     +(4+8*mi+4*(mi^2))*(3*(y(2)^2)*y(3)*y(5)+(y(2)^3)*y(6)+3*(y(5)
85         ^2)*y(6)*y(2)+(y(5)^3)*y(3))+...
86     +(6+12*mi+6*(mi^2))*(2*y(2)*y(3)*(y(5)^2)+2*y(5)*y(6)*(y(2)^2)
87         );
88
89 t=-4*(mi^2)*y(3)+(2*mi+6*(mi^2))*2*y(2)*y(3)+...
90     -(4*mi+4*(mi^2))*3*(y(2)^2)*y(3)+((1+mi)^2)*4*(y(2)^3)*y(3);
91
92 q=2*mi*((y(3)^2)+2*y(2)*y(4)+y(3)*y(6)+2*y(2)*y(7)+y(6)*y(3)+2*y
93     (5)*y(4)+(y(6)^2)+2*y(5)*y(7))+...
94     -2*mi*(2*y(2)*(y(3)^2)+2*(y(2)^2)*y(4)+2*y(5)*y(6)*y(3)+2*(y
95         (5)^2)*y(4)+2*y(2)*y(3)*y(6)+2*(y(2)^2)*y(7)+2*y(5)*(y(6)
96         ^2)+2*(y(5)^2)*y(7))+...
97     -4*mi*((y(3)^2)*y(5)+y(2)*y(6)*y(3)+2*y(2)*y(5)*y(4)+y(3)*y

```

$$(5) * y(6) + y(2) * (y(6)^2) + 2 * y(2) * y(5) * y(7));$$

91

$$x = 2 * mi * (2 * y(2) * (y(3)^2) + 2 * ((y(2)^2) * y(4))) - 2 * mi * ((y(3)^2) + 2 * y(2) * y(4));$$

93

94 %B1'

95

$$F(6) = 2 * y(7) * ((a/b) - (c/d)) + ((p * n - q * m) / (m^2)) + ((v * t - x * s) / (s^2));$$

97

98

99

$$o = -4 * (mi^2) * (y(4) + y(7)) + (2 * mi + 6 * (mi^2)) * (2 * y(2) * y(4) + 2 * y(5) * y(7) + (y(3)^2) + (y(6)^2)) + \dots$$

$$- (4 * mi + 4 * (mi^2)) * (3 * (y(2)^2) * y(4) + 3 * (y(3)^2) * y(2) + 3 * (y(5)^2) * y(7) + 3 * (y(6)^2) * y(5)) + \dots$$

$$+ ((mi)^2 + 2 * mi + 1) * (4 * (y(2)^3) * y(4) + 6 * (y(2)^2) * (y(3)^2) + 4 * (y(5)^3) * y(7) + 6 * (y(5)^2) * (y(6)^2)) + \dots$$

$$+ (4 * mi + 12 * (mi^2)) * (y(4) * y(5) + y(3) * y(6) + y(2) * y(7)) + \dots$$

$$- (12 * mi + 12 * (mi^2)) * (2 * y(2) * y(4) * y(5) + (y(3)^2) * y(5) + y(4) * (y(5)^2) + 2 * y(2) * y(3) * y(6) + 2 * y(3) * y(5) * y(6) + (y(2)^2) * y(7) + 2 * y(2) * y(5) * y(7) + y(2) * (y(6)^2)) + \dots$$

$$+ (4 + 8 * mi + 4 * (mi^2)) * (3 * (y(2)^2) * y(4) * y(5) + 3 * (y(3)^2) * y(2) * y(5) + y(4) * (y(5)^3) + 3 * (y(2)^2) * y(3) * y(6) + 3 * (y(5)^2) * y(6) * y(3) + (y(2)^3) * y(7) + 3 * (y(5)^2) * y(7) * y(2) + 3 * (y(6)^2) * y(5) * y(2)) + \dots$$

$$+ (6 + 12 * mi + 6 * (mi^2)) * (2 * y(2) * y(4) * (y(5)^2) + (y(3)^2) * (y(5)^2) + 4 * y(2) * y(3) * y(5) * y(6) + 2 * (y(2)^2) * y(5) * y(7) + (y(2)^2) * (y(6)^2));$$

107

$$u = -4 * (mi^2) * y(4) + (2 * mi + 6 * (mi^2)) * (2 * y(2) * y(4) + (y(3)^2)) + \dots$$

$$- (4 * mi + 4 * (mi^2)) * (3 * (y(2)^2) * y(4) + 3 * y(2) * (y(3)^2)) + \dots$$

$$+ ((mi)^2 + 2 * mi + 1) * (4 * (y(2)^3) * y(4) + 6 * (y(2)^2) * (y(3)^2));$$

111

$$r = 2 * mi * (3 * y(3) * y(4)) + 2 * mi * (y(4) * y(6) + 2 * y(3) * y(7)) + 2 * mi * (y(7) * y(3) + 2 * y(6) * y(4)) + \dots$$

```

113 +2*mi*(3*y(6)*y(7))-2*mi*(6*y(3)*y(2)*y(4)+(y(3)^3))+...
114 -4*mi*(3*y(3)*y(4)*y(5)+y(2)*y(3)*y(7)+(y(3)^2)*y(6)+2*y(2)*y
    (4)*y(6))+...
115 -2*mi*(2*y(5)*y(7)*y(3)+(y(6)^2)*y(3)+4*y(5)*y(6)*y(4))+...
116 -2*mi*(2*y(2)*y(4)*y(6)+(y(3)^2)*y(6)+4*y(2)*y(3)*y(7))+...
117 -4*mi*(y(4)*y(5)*y(6)+y(3)*(y(6)^2)+3*y(2)*y(6)*y(7)+2*y(3)*y
    (5)*y(7))+...
118 -2*mi*(6*y(5)*y(6)*y(7)+(y(6)^3));
119
120
121 w=2*mi*(6*y(2)*y(3)*y(4)+(y(3)^3))-2*mi*(3*y(3)*y(4));
122
123
124
125 %B2'
126
127 F(7)=(p*m*o-p*(n^2)+q*m*n-r*(m^2))/(m^3)+(v*s*u-v*(t^2)+x*s*t-w
    *(s^2))/(s^3);
128
129
130
131 F=[F(1);F(2);F(3);F(4);F(5);F(6);F(7)];

```

## A.3 Métodos Numéricos de Diferenças Finitas

### A.3.1 Discretização

A aproximação numérica da solução de uma EDP é obtida pela transformação do problema contínuo num problema discreto finito. Logo, o domínio deixa de ser um intervalo e passa a ser uma região do plano ou espaço, ver [4].

### A.3.2 Aproximação de Derivadas por Diferenças Finitas

A ideia geral do método de diferenças finitas é a discretização do domínio através de uma malha e a substituição das derivadas presentes na equação diferencial por aproximações envolvendo somente valores numéricos da função [21].

A ferramenta matemática básica para o cálculo de aproximações para as derivadas é a série de Taylor que relaciona valores da função e suas derivadas num ponto  $x$ ,  $y(x)$ , com valores dessa mesma função numa vizinhança  $h$  de  $x$ , ou seja,  $y(x+h)$ , conforme a equação abaixo:

$$y(x+h) = y(x) + hy'(x) + \frac{h^2}{2!}y''(x) + \dots + \frac{h^n}{n!}y^{(n)}(x) + \frac{h^{(n+1)}}{(n+1)!}y^{(n+1)}(\xi), \quad (\text{A.1})$$

com  $x < \xi < x+h$ . Na equação acima, a parte da equação definida por

$$\frac{h^{(n+1)}}{(n+1)!}y^{(n+1)}(\xi), \quad (\text{A.2})$$

representa o erro de aproximação (ou truncamento) da equação (A.1).

### A.3.3 Fórmulas para Diferenças Finitas

#### A.3.3.1 Fórmula Progressiva

É obtida isolando a primeira derivada de  $y(x)$  na equação (A.1), obtendo:

$$y'(x) = \frac{y(x+h) - y(x)}{h} - \frac{h}{2}y''(\xi). \quad (\text{A.3})$$

### A.3.3.2 Fórmula Regressiva

Relacionando os valores da função e suas derivadas num ponto  $x$ ,  $y(x)$ , com valores dessa mesma função numa vizinhança  $-h$  de  $x$ , ou seja,  $y(x-h)$  e isolando a primeira derivada de  $y(x)$ , obtemos:

$$y'(x) = \frac{y(x-h) - y(x)}{h} - \frac{h}{2}y''(\xi). \quad (\text{A.4})$$

### A.3.3.3 Fórmula Central

É obtida isolando a primeira derivada de  $y(x)$  através da soma das equações (A.3) e (A.4):

$$y'(x) = \frac{y(x+h) - y(x-h)}{2h} - \frac{h^3}{3!}y'''(\xi). \quad (\text{A.5})$$

### A.3.4 Erro e Ordem de Aproximação de Uma Fórmula de Diferença

Seja  $F(x, h)$  uma fórmula de diferença para aproximação da derivada de ordem  $q$  de uma função  $y(x)$  com erro  $\varepsilon(x, h)$ . Então:

$$y^{(q)}(x) = F(x, h) + \varepsilon(x, h). \quad (\text{A.6})$$

A fórmula  $F(x, h)$  é de ordem  $p$  se  $\varepsilon(x, h) = h^p R(x)$ , onde  $R(x)$  não depende de  $h$ .

### A.3.5 Principais Fórmulas de Diferenças para Duas Variáveis

Considerando uma malha no plano  $(x, t)$  como sendo o conjunto de pontos  $(x_i, t_j) = (x_0 + ih, t_0 + jk)$ , onde  $h$  é o espaçamento em  $x$  e  $k$  em  $t$ , e generalizando os resultados acima para uma aproximação de duas variáveis, obtemos as seguintes fórmulas para a primeira derivada em  $t$ :

#### A.3.5.1 Fórmula Progressiva

$$u_t(x, t) = \frac{u(x, t+k) - u(x, t)}{k} - \frac{k}{2}u_{tt}(x, \chi), \quad t < \chi < t+k. \quad (\text{A.7})$$

**A.3.5.2 Fórmula Regressiva**

$$u_t(x, t) = \frac{u(x, t) - u(x, t - k)}{k} + \frac{k}{2}u_{tt}(x, \chi), \quad t - k < \chi < t. \quad (\text{A.8})$$

**A.3.5.3 Fórmula Central**

$$u_t(x, t) = \frac{u(x, t + k) - u(x, t - k)}{2k} - \frac{k^3}{6}u_{ttt}(x, \chi), \quad t - k < \chi < t + k \quad (\text{A.9})$$

**A.3.6 Métodos Numéricos de Diferenças Finitas**

A seguir serão apresentados os Métodos de Diferenças Finitas utilizados neste trabalho. Para mais detalhes ver [1].

Considerando uma malha no plano  $(x, t)$  onde a largura da malha é dada por  $h \equiv \Delta x$  e o passo de tempo  $k \equiv \Delta t$ , onde a discretização da malha possui pontos  $(x_j, t_n)$  dados por

$$\begin{aligned} x_j &= jh, & j &= \dots, -1, 0, 1, 2, \dots \\ t_n &= nk, & n &= 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Também define-se

$$x_{j+1/2} = x_j + h/2 = \left(j + \frac{1}{2}\right)h.$$

Os métodos de diferenças finitas produzem aproximações  $U_j^n \in \mathbb{R}^m$  para a solução  $u(x_j, t_n)$  no conjunto de pontos dicretos. Cada valor pontual da solução é denotado por

$$u_j^n = u(x_j, t_n),$$

ver [1].

### A.3.6.1 Métodos Conservativos

Um método de diferenças finitas para uma lei de conservação tem a forma

$$U_j^{n+1} = U_j^n - \frac{k}{h} [F(U_j^n, U_{j+1}^n) - F(U_{j-1}^n, U_j^n)]. \quad (\text{A.10})$$

**Método Lax-Wendroff.** A forma conservativa de Lax-Wendroff é

$$U_j^{n+1} = U_j^n - \frac{k}{2h} (f(U_{j+1}^n) - f(U_{j-1}^n)) + \frac{k^2}{2h^2} [A_{j+1/2} (f(U_{j+1}^n) - f(U_j^n)) - A_{j+1/2} (f(U_j^n) - f(U_{j-1}^n))], \quad (\text{A.11})$$

onde  $A(u) = f'(u)$  e  $A_{j\pm 1/2}$  é a matriz jacobiana com valores em  $\frac{1}{2} (U_j^n + U_{j\pm 1}^n)$ .

**Método Godunov.** Tem-se

$$U_j^{n+1} = U_j^n - \frac{k}{h} [F(U_j^n, U_{j+1}^n) - F(U_{j-1}^n, U_j^n)], \quad (\text{A.12})$$

onde  $u^{*n}(x, t_n) \equiv U_j^n$  e o fluxo numérico  $F$  é dado por

$$F(U_j^n, U_{j+1}^n) = \frac{1}{k} \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(u^{*n}(x_{j+1/2}, t)) dt. \quad (\text{A.13})$$

**Método NT.** Introduzido por Nessyahu e Tadmor, pode ser visto como uma extensão natural do método de Lax-Friederichs [1] e tem sua forma conservativa dada por

$$U_j^{n+1} = \frac{1}{2} [U_{j-1}^n + U_{j+1}^n] - \lambda [F(U_j^n, U_{j+1}^n) - F(U_{j-1}^n, U_j^n)], \quad (\text{A.14})$$

onde  $\lambda \equiv \frac{\Delta t}{2\Delta x}$ . Para mais detalhes do método, ver [22, 23].