

Universidade Federal Fluminense

DIEGO SOARES MONTEIRO DA SILVA

**Soluções De Riemann Para Um Escoamento Bifásico
Com Fonte De Dirac Em Um Meio Poroso**

Volta Redonda

2016

DIEGO SOARES MONTEIRO DA SILVA

Soluções De Riemann Para Um Escoamento Bifásico Com Fonte De Dirac Em Um Meio Poroso

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Modelagem Computacional em Ciência e Tecnologia da Universidade Federal Fluminense, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Modelagem Computacional em Ciência e Tecnologia. Área de Concentração: Modelagem Computacional.

Orientador:

Prof. Panters Rodríguez Bermúdez, D.Sc.

Coorientador:

Prof. Diomar Cesar Lobão, Ph.D.
Prof. Gustavo Benitez Alvarez, D.Sc.

UNIVERSIDADE FEDERAL FLUMINENSE

Volta Redonda

2016

S586 Silva, Diego Soares Monteiro da.
Soluções de Riemann para um escoamento bifásico com
fonte de Dirac em um meio poroso / Diego Soares Monteiro da
Silveira – Volta Redonda, 2016.
90 f. il.

Dissertação (Mestrado em Modelagem Computacional em
Ciência e Tecnologia) – Universidade Federal Fluminense.
Orientador: Panters Rodríguez Bermúdez.
Coorientador: Diomar Cesar Lobão; Gustavo Benitez Alvarez.

1. Problemas de Riemann. 2. Leis de balanço. 3. Critério de
entropia. 4. Meios porosos. 5. Fluxo descontínuo. 6. Diferenças
finitas. 7. Abordagem Lagrangeana-Euleriana. I. Bermúdez, Panters
Rodríguez. II. Lobão, Diomar Cesar. III. Alvarez, Gustavo Benitez.
IV. Título.

CDD 532.5

Soluções De Riemann Para Um Escoamento Bifásico Com Fonte De Dirac Em Um Meio Poroso

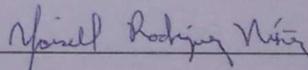
Diego Soares Monteiro da Silva

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Modelagem Computacional em Ciência e Tecnologia da Universidade Federal Fluminense, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Modelagem Computacional em Ciência e Tecnologia. Área de Concentração: Modelagem Computacional.

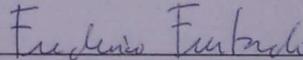
Banca Examinadora:



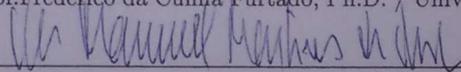
Prof. Panters Rodríguez Bermúdez, D.Sc / MCCT-UFF
(Orientador)



Prof. Yoissell Rodríguez Núñez, D.Sc. / EEIMVR-UFF



Prof. Frederico da Cunha Furtado, Ph.D. / University Wyoming,



Prof. Vítor Manuel Martins de Matos, D.Sc. / Universidade do Porto

Volta Redonda, 7 de julho de 2016.

Dedicatória. Aos meus familiares e amigos.

Agradecimentos

Escrever um agradecimento não é uma tarefa tão fácil quanto parece. Por isso, desde já menciono ser eternamente grato a todos que de certa forma ajudaram e torceram pela realização deste trabalho.

Primeiramente, agradeço à Deus por cada dia a mim concedido, pela saúde e força para lutar por meus sonhos, e esta dissertação é um deles.

Agradeço ao professor Panters Rodríguez por ter aceitado me orientar. Agradeço a ele por toda paciência, dedicação, amizade e conhecimentos a mim passados. O seu rigor matemático foi fundamental para o meu crescimento acadêmico. Panters é e foi, sem dúvidas, um excelente orientador.

Serei sempre grato aos meus coorientadores, Diomar Cesar Lobão e Gustavo Benitez, por terem sempre algo novo para nos apresentar. O professor Lobão com toda sua paciência para nos ensinar a programar e sempre com boa vontade para nos ajudar. Além deles, agradeço a toda equipe de pesquisadores e funcionários do MCCT, sempre empenhados em solucionar nossos problemas.

Agradeço imensamente ao professor Eduardo Abreu (IMECC-UNICAMP) e ao John Perez (IMECC-UNICAMP) por todas as contribuições dadas ao nosso trabalho, por toda a paciência e prontidão para responder os e-mails. Em cada um destes um novo aprendizado. Nesse pequeno texto fica apenas uma lembrança de minha eterna gratidão.

Agradeço a minha família, meus pais José Maria e minha mãe Rita, por toda disciplina a mim passada e por ter como prioridade a educação dos filhos. Agradeço ainda aos meus irmãos, Thiago e Natasha e aos meus tios Mário e Maria Aparecida por todos os debates sobre educação, pesquisa e ciência.

Agradeço a todos os meus amigos que fizeram parte dessa jornada, dentre eles agradeço em especial ao Rodolfo, que se tornou grande amigo e muito me ajudou e ensinou.

Agradeço ao professor (orientador) Edisio Alves e aos meus amigos de graduação que

muito me incentivaram na escolha da carreira acadêmica.

Resumo

No presente trabalho estuda-se o escoamento bifásico vertical de fluidos imiscíveis em um meio poroso homogêneo sob ação de um termo de fonte singular do tipo δ de Dirac, o qual implica também em uma descontinuidade na função de fluxo. São considerados os efeitos da gravidade, enquanto os termos de pressão capilar são negligenciados. Utiliza-se como metodologia uma extensão geométrica do critério de entropia de Oleinik para construir as soluções analíticas entrópicas para uma classe de problemas de Riemann. Do ponto de vista numérico, é apresentado e implementado um esquema tipo diferenças finitas obtido a partir de uma abordagem Lagrangeana-Euleriana para obtenção das soluções de Riemann para o modelo proposto. Por fim, compara-se qualitativamente as soluções analíticas com as numéricas. Tal comparação permite verificar a eficácia do método na resolução do problema proposto. O trabalho consiste de uma parte teórica e outra numérica.

Abstract

In this work we study vertical two-phase flow of immiscible fluids in a homogeneous porous medium under the action of a natural source term of the type δ of Dirac, this kind of source, produces a discontinuity in the flux function. We consider the gravitational effects on the flow, while the terms of capillary pressure are neglected. Methodology is used as a geometric extension of Oleinik entropy criterion to construct the analytical solutions to a class of Riemann problem. From the numerical point of view, it is presented and implemented a scheme finite differences type obtained from a Lagrangian-Eulerian approach to obtain the Riemann solutions for the proposed model. Finally, it compares qualitative analytical solutions with the numerical. This comparison allows you to check the effectiveness of the method in solving the proposed problem. The work consists of a theoretical part and another number.

Palavras-chave

1. Problemas de Riemann
2. Leis de Balanço
3. Critério de Entropia
4. Meios Porosos
5. Fluxo descontínuo
6. Diferenças Finitas
7. Abordagem Lagrangeana-Euleriana.

Glossário

PVI	:	Problema de valor inicial
CFL	:	Número de Courant-Friedrichs-Lewy
EDP	:	Equações Diferenciais Parciais
PR-1	:	Problema de Riemann 1
PR-2	:	Problema de Riemann 2
PR-3	:	Problema de Riemann 3
LEH1	:	Esquema Lagrangeano-Euleriano para Leis de Conservação Hiperbólicas 1
LEH2	:	Esquema Lagrangeano-Euleriano para Leis de Conservação Hiperbólicas 2
LEB1	:	Esquema Lagrangeano-Euleriano para Leis de Balanço 1
LEB2	:	Esquema Lagrangeano-Euleriano para Leis de Balanço 2

Sumário

Lista de Símbolos	xii
1 Introdução	15
1.1 Considerações Gerais	15
1.2 Objetivos	18
1.3 Estrutura da Dissertação	18
2 Fundamentos Teóricos sobre Leis de Conservação Escalares	20
2.1 Leis de Conservação Escalar Lineares	21
2.2 Leis de Conservação Escalar Não-lineares	22
2.2.1 Soluções de Riemann para Função de Fluxo Convexa	24
2.2.2 Critérios de Entropia	26
2.2.3 Soluções de Riemann para Função de Fluxo Não-Convexa	30
3 Um Esquema de Diferenças Finitas Através de uma Abordagem Lagrangeana-Euleriana	34
3.1 Justificativa	34
3.2 O esquema Lagrangeano-Euleriano para Leis de Conservação Hiperbólicas .	35
3.3 O esquema Lagrangeano-Euleriano para Leis de Balanço	38
3.4 Implementação	40
3.5 Validação do Código	42
4 O Modelo	48
4.1 Modelo Matemático	48

4.2	Adimensionalização	51
4.3	Permeabilidade Quadrática	52
5	Construção da Solução Analítica para o Problema de Riemann	53
5.1	A Função de Fluxo	53
5.2	Construção da Solução Analítica Baseado Na Extensão do Critério de Oleinik	55
6	Resultados Numéricos	68
6.1	Regularização do Termo Fonte $\delta(z)$	68
6.2	Resultados Numéricos e Discussões	69
7	Conclusões e Trabalhos Futuros	82
7.1	Conclusões	82
7.2	Trabalhos futuros	83
	Anexo A - Método Numérico de Diferenças Finitas e Algoritmos	84
A.1	Método de Diferenças Finitas	84
A.2	Algoritmos	85
	Referências	89

Lista de Símbolos

\mathbb{N} conjunto dos números naturais;

\mathbb{Z} conjunto dos números inteiros;

\mathbb{R} conjunto dos números reais;

\mathbb{R}^+ conjunto dos números reais não-negativos;

$\Omega := \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$;

s variável da quantidade conservada; saturação;

z variável espacial;

t variável temporal;

F função de fluxo;

D volume de controle ;

Q termo fonte;

C^1 classe de funções diferenciáveis;

σ velocidade do choque;

L^p espaços de funções integráveis;

h comprimento da célula computacional;

k passo de tempo;

D_j^n volume de controle numérico (tubo integral);

S variável da quantidade conservada numérica, saturação;

$f(s)$ fluxo numérico à esquerda da descontinuidade;

$h(s)$ fluxo numérico à direita da descontinuidade;

- ϕ porosidade da rocha;
- ρ_i massa específica (densidade absoluta) da fase i ;
- $\delta(\mathbf{z})$ delta de Dirac;
- \mathbf{K} permeabilidade absoluta da rocha;
- k_i permeabilidade relativa à fase i ;
- μ_i viscosidade na fase i ;
- p_i pressão na fase i ;
- g aceleração da gravidade;
- \mathbf{e}_z vetor unitário;
- λ mobilidade na fase i ;
- \mathbf{f}_i fluxo fracionário na fase i ;
- q_i frequência de injeção na fase i ;
- d constante de integração;
- \mathbf{v} velocidade total de Darcy;
- \mathbf{v}_i velocidade de Darcy para fase i ;
- $\mathbf{H}(\mathbf{z})$ função de Heaviside;
- \mathbf{SH} choque;
- \mathbf{R} rarefação;

SUBSCRITOS E SUPERESCRITOS:

- $\mathbf{0}$ condição inicial;
- $\tilde{\cdot}$ variáveis adimensionais;
- l estado a esquerda;
- r estado a direita;
- j índice da malha computacional;

i fases *w* ou *o*;

w fase da água;

o fase do óleo.

Capítulo 1

Introdução

1.1 Considerações Gerais

No presente trabalho, estuda-se os efeitos produzidos por uma injeção pontual sobre um escoamento bifásico de fluidos imiscíveis num meio poroso. Considera-se que o escoamento ocorre em um cilindro muito comprido, estreito e que se encontra na vertical. Assume-se que os fluidos apresentam massas específicas (densidades absolutas) diferentes e que o meio é considerado totalmente saturado por estes. Considera-se que no instante inicial existe uma interface impermeável em $z = 0$, a qual separa duas "misturas", por exemplo água e óleo, com proporções de saturações diferentes, como pode ser visto na Figura 1.1. Estuda-se o escoamento apenas próximo à interface, no momento em que a mesma desaparece devido ao movimento dos fluidos. Em linguagem matemática, isto é equivalente a resolver uma classe de Problemas de Riemann para uma lei de balanço cujo termo fonte é dado na forma de δ de Dirac. Como o escoamento é analisado apenas próximo a interface, as condições de contorno são desconsideradas.

A solução para estes problemas dependem das propriedades físicas dos fluidos e da frequência em que é injetada a quantidade de mistura. Assim, a evolução a partir dos dados iniciais reflete a disparidade entre as densidades e viscosidades dos fluidos. Não obstante, como um primeiro passo para compreender a influência do termo fonte juntamente com os fenômenos convectivos devido a ação da gravidade se assume em todos os casos estudados que as viscosidades são iguais.

As maiores aplicações para este trabalho se fazem presente na engenharia de petróleo. Devido ao fato da recuperação avançada de petróleo corresponder a maior etapa de vida útil de um reservatório e, conseqüentemente, a maior parte do petróleo produzido

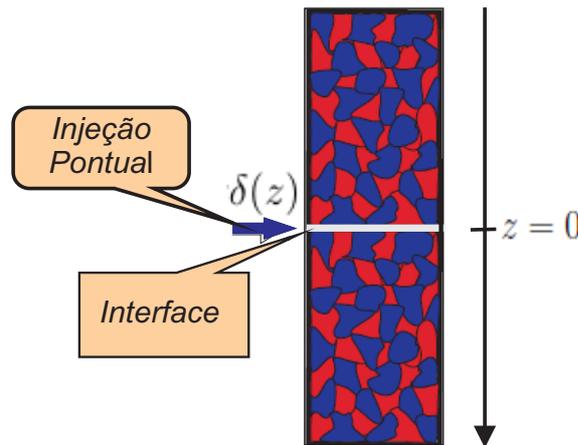


Figura 1.1: Esquema para o reservatório, onde cada cor representa um fluido. Na parte superior do reservatório, por convenção, tem-se $z < 0$, enquanto na parte inferior $z > 0$. E no ponto $z = 0$ existe uma fonte pontual, que, matematicamente, pode ser representada por $\delta(z)$. Fonte: Rodríguez-Bermúdez [1].

mundialmente existe um interesse tanto do ponto de vista energético, quanto ambiental em se estudar os escoamentos bifásicos e trifásicos em meios porosos que descrevem este processo de recuperação [1, 2].

Teorias sobre Problemas de Riemann datam de 1860 [3], quando Riemann estudou o problema do tubo de choque, que consistia em um experimento utilizando um tubo cilíndrico fino e longo. Este continha dois gases separados por uma membrana fina, onde em cada lado os gases deveriam ter densidades e pressões diferentes, assim quando a membrana fosse rompida Riemann desejava determinar o movimento dos gases [4, 1, 5, 3].

Os escoamentos em meios porosos são descritos por leis de conservação não-lineares. O caso não-linear mais simples foi resolvido por Buckley e Leverett em 1942 [6]. Para solucionar o problema eles desenvolveram um método que analisa geometricamente o gráfico da função de fluxo (S-shaped), o mesmo ficou conhecido como método de fluxo fracionário e é comumente usado em engenharia de petróleo [6, 1]. Através deste método Proskurowski em 1981 [7], resolveu a equação de Buckley-Leverett para um escoamento bifásico considerando a ação da gravidade sobre tal escoamento. Existem trabalhos mais recentes que estudam as aplicações da gravidade no escoamento bifásico como em [8, 9, 10]. Dentre estes, destaca-se o trabalho de Kaasschieter, que em 1999 [8] estudou a equação de Buckley-Leverett sobre a ação da gravidade e considerou a heterogeneidade do meio poroso. Tal fato, implica matematicamente na presença de uma descontinuidade na função de fluxo. Kaasschieter [8] construiu as soluções analíticas através de um teorema que permitiu estender a construção clássica de Oleinik para o problema que ele estava

estudando.

Os efeitos gravitacionais em escoamentos com dois fluidos imiscíveis em meios porosos são bem entendidos. Como estes escoamentos são modelados por uma lei de conservação escalar, as soluções podem ser facilmente obtidas através da construção geométrica clássica de Oleinik [11]. Entretanto, não foi encontrado na literatura trabalhos que considerem a ação da gravidade e a presença de um termo fonte do tipo δ de Dirac em um mesmo modelo.

O estado da arte para escoamento de dois fluidos imiscíveis com um termo fonte δ de Dirac é mais restrito tanto do ponto de vista analítico quanto numérico. Este termo singular implica na presença de uma descontinuidade na função de fluxo, fato que não permite obter a solução pela construção geométrica clássica de Oleinik [12], e, além disso, não resulta efetivo com a aplicação dos métodos numéricos de diferenças finitas clássicos [13].

Devido à dificuldade imposta pela descontinuidade na função de fluxo serão enunciadas duas conjecturas permitem estender a construção geométrica clássica de Oleinik para o modelo proposto no presente trabalho, as mesmas foram desenvolvidas de maneira análoga ao teorema presente em [8]. Destaca-se que a escrita tais conjecturas representam um diferencial, do ponto de vista teórico desta pesquisa.

Numericamente os Problemas de Valor Inicial (PVI) para leis de conservação hiperbólicas podem muitas vezes ser resolvidos através de métodos de diferenças finitas clássicos, como Lax-Friedrichs e Lax-Wendroff [14]. Porém, para os casos de leis de balanço muitas vezes estes métodos não preservam o estado de equilíbrio entre o fluxo e o termo fonte. Tal fato motiva o desenvolvimento de uma nova classe de métodos conhecidos como "well-balanced" [13, 10].

No presente trabalho, para se trabalhar com as dificuldades da descontinuidade do fluxo e a presença de um termo fonte singular, utiliza-se um esquema tipo diferenças finitas na estrutura Lagrangeana-Euleriana, desenvolvido em [13]. O mesmo apresenta certa similaridade ao esquema de Lax-Friedrichs, entretanto tem como vantagem em relação a este preservar o equilíbrio entre o fluxo e o termo fonte. Tal método apresenta indícios de ser "well-balanced" como discutido em [13]. Destaca-se que um diferencial do presente trabalho, do ponto de vista numérico, é que para fins de implementação do termo fonte recorre-se a um processo de regularização do delta com base em [15].

1.2 Objetivos

Propõe-se os seguintes objetivos para um melhor desenvolvimento do trabalho.

- Construir as soluções analíticas para uma classe de problemas de Riemann através de uma extensão da construção geométrica de Oleinik;
- Obter a solução numérica com o auxílio de um esquema na estrutura Lagrangeana-Euleriana e compará-la à solução analítica.

1.3 Estrutura da Dissertação

No capítulo 2, são apresentados alguns conceitos básicos sobre leis de conservação escalares, bem como as soluções de Riemann. São expostos alguns critérios de entropia como de Oleinik e o critério do perfil viscoso, os quais são necessários para determinar a unicidade da solução. Na última seção deste capítulo expõe-se a construção geométrica clássica de Oleinik para funções de fluxo contínuas.

No capítulo 3, mostra-se o esquema tipo diferenças finitas na estrutura Lagrangeana-Euleriana, desenvolvido em [13], que será utilizado para resolver numericamente o modelo matemático proposto no presente trabalho. Inicialmente faz-se uma breve exposição deste esquema para leis de conservação hiperbólica, para em um segundo momento avançar na mesma estrutura para leis de balanço. Algumas aplicações deste esquema são apresentadas como forma de validar o código computacional.

No capítulo 4, obtêm-se a lei de balanço que modela o escoamento vertical de dois fluidos em um meio poroso sobre a ação de um termo de fonte δ de Dirac. As equações são adimensionalizadas para que as variáveis fiquem normalizadas. Por fim apresenta-se o modelo de permeabilidade quadrática, o que torna o fluxo dependente explicitamente da saturação.

No capítulo 5, faz-se uma descrição de como são obtidas as soluções de Riemann do problema estudado utilizando uma construção geométrica que resulta em uma extensão da construção clássica de Oleinik para fluxos escalares contínuos. A extensão geométrica proposta é análoga à clássica de Oleinik em regiões onde o fluxo é uma função contínua, porém para pontos de descontinuidade do fluxo, enunciam-se duas conjecturas que permite obter a solução entrópica para o modelo estudado.

No capítulo 6, expõem-se duas regularizações para o termo fonte (δ de Dirac), uma

com função linear e outra função do tipo cosseno. Apresenta-se as soluções numéricas obtidas com o auxílio de um esquema de diferenças finitas na estrutura Lagrangeana-Euleriana. Por fim, comparam-se as soluções analíticas com as obtidas numericamente, corroborando a validade da construção geométrica proposta (incluindo as novas condições de entropia) assim como a eficácia do método numérico implementado em capturar as soluções de Riemann para o modelo estudado.

Ao longo deste trabalho todos os gráficos para as funções de fluxo e todas as soluções numéricas foram obtidas através do MATLAB[®].

Capítulo 2

Fundamentos Teóricos sobre Leis de Conservação Escalares

Neste capítulo serão apresentados alguns conceitos sobre leis de conservação escalares os quais permitem uma melhor compreensão das construções geométricas das soluções de Riemann para o modelo proposto.

As leis de conservação modelam uma variedade de fenômenos físicos que são aplicados em dinâmica dos fluidos, meteorologia, semicondutores e engenharia de petróleo [16, 17, 14]. O escoamento bifásico em meios porosos é modelado por uma lei de conservação escalar, que em uma dimensão apresenta a seguinte forma [18, 5]:

$$\frac{\partial}{\partial t}(s(z, t)) + \frac{\partial}{\partial z}F(s(z, t)) = 0, \quad (2.1)$$

onde $s : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \mapsto \mathbb{R}$ é um escalar das quantidades conservadas e $F(s)$ representa o fluxo.

Quando sobre um escoamento bifásico age um termo fonte, tal escoamento é descrito, matematicamente, por uma lei de balanço, que em uma dimensão apresenta a seguinte forma:

$$\frac{\partial}{\partial t}(s(z, t)) + \frac{\partial}{\partial z}F(s(z, t)) = Q(z, t, s). \quad (2.2)$$

Nota-se que a equação (2.1) representa que uma certa quantidade física dentro de um volume de controle $D \subset \mathbb{R}^m$ é mantida constante. Enquanto em (2.2), poder-se-á acrescentar ou retirar substância dentro de tal volume de controle (veja [18]) por uma fonte externa ou interna $Q(z, t, s)$ [18, 5].

Inicia-se a apresentação dos fundamentos teóricos sobre leis de conservação escalares com o caso mais simples, o linear.

2.1 Leis de Conservação Escalar Lineares

Considere o Problema de Valor Inicial (PVI) para a equação da advecção em uma dimensão :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}(s) + a\frac{\partial}{\partial z}(s) = 0, \text{ em } \Omega := \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+, \\ s(z, t = 0) = s_0(z), \text{ em } \mathbb{R}. \end{cases} \quad (2.3)$$

onde a função incógnita é $s(z, t)$, a função de fluxo linear é $F(s) = as$

A solução para esse PVI pode ser obtida através do método clássico das características. As curvas características são curvas $z = z(t)$ no plano tz ao longo das quais a equação diferencial parcial (EDP) pode ser escrita em termos de uma derivada total. Ao escrever s como uma função de t somente, ao longo de uma característica obtém-se:

$$\frac{ds}{dt} = \frac{\partial s}{\partial t} + \frac{dz}{dt} \frac{\partial s}{\partial z}, \quad (2.4)$$

De (2.3) e (2.4) têm-se que a curva característica $z = z(t)$ satisfaz a equação diferencial ordinária (EDO):

$$\frac{dz}{dt} = a. \quad (2.5)$$

A taxa de variação de s ao longo de $z = z(t)$ é zero, ou seja, s é constante ao longo da curva característica. De (2.5), obtém-se uma família de características, que para este caso são retas. Ao tomar por exemplo,

$$z(0) = z_0, \quad (2.6)$$

a reta

$$z = z_0 + at, \quad (2.7)$$

é a única característica que passa pelo ponto $(z_0, 0)$. Se s satisfaz a condição inicial $s(z, 0) = s_0(z)$ em $t = 0$, então ao longo da característica $z(t) = z_0 + at$ que passa pelo ponto inicial z_0 do eixo z , tem-se a solução dada por:

$$s(z, t) = s_0(z_0) = s_0(z - at). \quad (2.8)$$

onde a representa a velocidade de propagação da mesma. Interpreta-se desta solução que dado um perfil inicial $s_0(z)$, o mesmo simplesmente irá transladar com velocidade a para a direita caso a seja positivo ou para a esquerda caso a seja negativo. A forma do

perfil permanecerá inalterada [18]. Tal fato não ocorre para os casos não lineares, sendo as ferramentas matemáticas necessárias para estes casos bem mais complexas. A seguir faz-se uma apresentação de tais ferramentas.

2.2 Leis de Conservação Escalar Não-lineares

Nesta seção, segue uma exposição similar à feita em [12] para os casos em que as funções de fluxo são não-lineares. Considere o seguinte problema de valor inicial:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}(s) + \frac{\partial}{\partial z}F(s) = 0, \text{ em } \Omega := \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+, \\ s(z, t = 0) = s_0(z), \text{ em } \mathbb{R}. \end{cases} \quad (2.9)$$

onde $F(s)$ é não linear.

As curvas características $t \rightarrow (z(t), t)$ para (2.9), satisfazem à equação:

$$\frac{dz}{dt} = F'(s). \quad (2.10)$$

Como F não depende explicitamente da variável espacial z e como s é constante ao longo das características, de (2.10) segue que estas são retas. Este fato permite construir do modo clássico as soluções de um problema de valor inicial. Assim, para cada ponto $(\xi, 0)$, com $\xi \in \mathbb{R}$ constrói-se a reta característica passando por este ponto e com inclinação $\frac{dz}{dt} = F'(s_0(\xi))$. Se os dados iniciais são suaves, então podem ser usados para determinar a solução $s(z, t)$ para um tempo t pequeno em que as características não se intersectam para cada $(z, t) \in \Omega$. Assim, resolve-se a equação:

$$z = F'(s_0(\xi))t + \xi, \quad (2.11)$$

de modo que a solução será dada por;

$$s(z, t) = s(\xi, 0) = s_0(z - F'(s)t). \quad (2.12)$$

É sabido que a partir de um determinado tempo, conhecido como tempo de quebre (ver Leveque [18]) as características oriundas de pontos diferentes no tempo $t = 0$ podem se encontrar, dando origem a soluções com mais de um valor no mesmo ponto. Quando esta equação modela um sistema físico, verifica-se nestas circunstâncias que a solução apresenta descontinuidade em z , cuja posição varia com o tempo. Para estes casos o conceito clássico de soluções de EDP mostra-se insuficiente, sendo necessário considerar

um conceito mais geral de solução de uma EDP [12].

Definição 2.2.1 Diz-se que s é uma solução forte ou clássica de (2.9) se s é uma função de classe C^1 .

Definição 2.2.2 Diz-se que s é uma solução fraca ou generalizada de (2.9) se para toda $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R} \times [0, \infty))$, s satisfaz a seguinte equação integral:

$$\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty [s\varphi_t + F(s)\varphi_z] dz dt + \int_{-\infty}^\infty [s_0(z)\varphi(z, 0)] dz = 0, \quad (2.13)$$

onde $C_0^\infty(\mathbb{R} \times [0, \infty))$ é o conjunto de funções infinitamente diferenciáveis com suporte compacto.

Teorema 2.2.1 Toda solução clássica da EDP em (2.9) também é solução no sentido fraco da mesma equação.

Demonstração:

Dá hipótese tem-se que se s é solução forte (ou clássica) de (2.9), então s é continuamente diferenciável e

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}(s) + \frac{\partial}{\partial z}F(s) = 0, & (z, t) \in \Omega, \\ s(z, 0) = s_0(z), & z \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

é claro que para qualquer função suave $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R} \times [0, \infty))$, tem-se também:

$$\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \left[\frac{\partial}{\partial t}(s) + \frac{\partial}{\partial z}F(s) \right] \varphi dz dt = 0,$$

integrando por partes e usando o fato de que φ tem suporte compacto, obtém-se que:

$$\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty [s\varphi_t + F(s)\varphi_z] dz dt + \int_{-\infty}^\infty [s_0(z)\varphi(z, 0)] dz = 0.$$

Portanto, a solução forte s é também uma solução fraca. \square

As soluções fracas podem conter descontinuidades. Suponha o caso em que a solução $s(z, t)$ se compõe de duas seções suaves, separadas por uma curva $z(t)$, através da qual o valor de s sofre um salto, nesse caso pode-se provar (veja [19]) que:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{F(s_r) - F(s_l)}{s_r - s_l} = \sigma. \quad (2.14)$$

onde s_r e s_l representam os limites de s à direita e à esquerda da curva $z(t)$, respectivamente, [12]. A condição (2.14) é chamada de condição de Rankine-Hugoniot e relaciona a velocidade de propagação da descontinuidade com os saltos de F e de s [12]. Uma solução contínua por partes $s(z, t)$ de (2.9) com salto ao longo da curva $z(t)$ satisfazendo a condição de Rankine-Hugoniot é denominada uma solução do tipo onda de choque.

É comum em modelos físicos o estudo de problemas do tipo (2.9) em que a condição inicial apresenta a seguinte forma:

$$s_0(z, t = 0) = \begin{cases} s_l^0, & z < 0, \\ s_r^0, & z > 0, \end{cases} \quad (2.15)$$

onde nesse caso s_l^0 e s_r^0 são estados constantes, sendo os estados iniciais à esquerda e à direita da descontinuidade, respectivamente [19, 1, 12].

De (2.9) e (2.15) pode-se escrever o problema de Riemann como segue:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}(s) + \frac{\partial}{\partial z}F(s) = 0, & (z, t) \in \Omega, \\ s_0(z, t = 0) = \begin{cases} s_l^0, & z < 0, \\ s_r^0, & z > 0. \end{cases} \end{cases} \quad (2.16)$$

Quando $F(s)$ é uma função convexa¹ as soluções de (2.16) podem ser do tipo ondas de choque ou do tipo ondas de rarefação, as quais são conhecidas em literatura como ondas elementares. Para o caso em que $F(s)$ for uma função côncava-convexa² as soluções são compostas por combinações destas ondas elementares. A seguir faz-se uma exposição para o caso em que F é convexa.

2.2.1 Soluções de Riemann para Função de Fluxo Convexa

Para construção das soluções de Riemann para o caso em que F é convexa faz-se uma breve apresentação seguindo [12]. Considere o caso mais simples $F(s) = \frac{s^2}{2}$, conhecido como equação de Burgers.

Para o caso em que $s_l^0 > s_r^0$, tem-se que $F'(s_l^0) > F'(s_r^0)$ e, portanto, as características que emergem no instante inicial de $z < 0$ cruzam com aquelas que emergem de $z > 0$,

¹Geometricamente uma função $F : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ é dita convexa quando seu gráfico se situa abaixo de qualquer de suas secantes, mais precisamente para $x, y \in (a, b)$ e $x < t < y$, então o ponto $(t, F(t))$ encontra-se abaixo da reta que conecta os pontos $(x, F(x))$ e $(y, F(y))$.

²A ser definida mais à frente.

tem-se esta situação exemplificada na Figura 2.1-(a). Utilizando a relação de Rankine-Hugoniot, deduz-se que a velocidade de propagação do choque é constante e igual a $\sigma = \frac{(s_l^0 + s_r^0)}{2}$. Na Figura 2.1-(b) tem-se o perfil típico da solução para um determinado tempo t . Para este caso existe uma única solução fraca dada por,

$$s(z, t) = \begin{cases} s_l^0, & z < \frac{(s_l^0 + s_r^0)t}{2}, \\ s_r^0, & z > \frac{(s_l^0 + s_r^0)t}{2}. \end{cases} \quad (2.17)$$

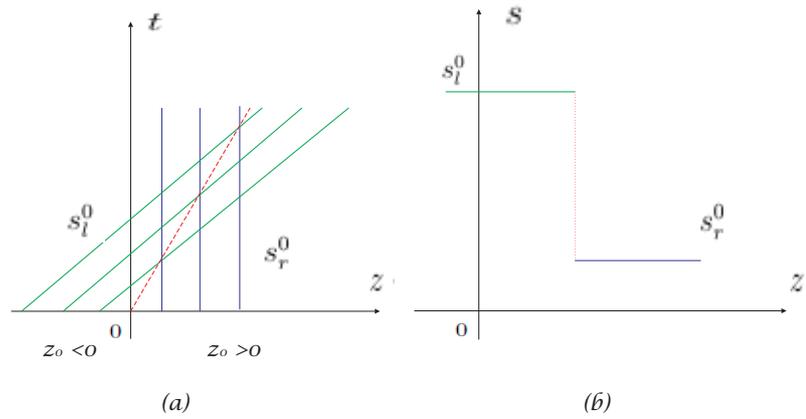


Figura 2.1: (a) Intersecção das características. As linhas azuis representam as características para $z_0 > 0$, as linhas verdes as características para $z_0 < 0$. A linha tracejada vermelha é a trajetória do choque. (b) Perfil da solução tipo onda de Choque. Fonte: van Duijn [19]

Para $s_l^0 < s_r^0$, as características não se intersectam e existem regiões do plano tz em que as mesmas não estão bem definidas, veja Figura 2.2 . A solução para tal problema é dada pela constante s_l^0 para $\frac{z}{t} < F'(s_l^0)$ e a constante s_r^0 para $\frac{z}{t} > F'(s_r^0)$, [18, 12]. Uma solução contínua pode ser obtida modificando-se o método das características nessas regiões de vazio com o auxílio da propriedade de invariância de escala ($s_k(z, t) = s(kz, kt)$, para $k > 0$), consegue-se escrever $s(z, t)$ como:

$$s(z, t) = \eta\left(\frac{z}{t}\right). \quad (2.18)$$

Substituindo (2.18) em (2.16) obtém-se:

$$\frac{z}{t} = F'(s), \quad (2.19)$$

no leque $F'(s_l^0) < \frac{z}{t} < F'(s_r^0)$. Neste leque, ao longo das retas passando pela origem com inclinação $\frac{t}{z}$, define-se o valor de s como a constante que satisfaz (2.19). Esta constante

é univocamente determinada para F' monótona. Pode-se verificar que estas retas são características e deste modo constrói-se a solução. Essa solução é conhecida como uma rarefação ou leque de rarefação entre s_l^0 e s_r^0 . Na Figura 2.2-(b) tem-se o perfil típico da solução para um determinado tempo t . E na Figura 2.2-(a) vê-se, claramente, o leque de rarefação. Essa solução fraca para este problema é da forma:

$$s(z, t) = \begin{cases} s_l^0, & z < s_l^0 t, \\ \frac{z}{t}, & s_l^0 \leq z \leq s_r^0, \\ s_r^0, & z > s_r^0. \end{cases} \quad (2.20)$$

É possível verificar que tal solução não é única para o caso $s_l^0 < s_r^0$. Uma outra solução fraca seria uma onda de choque satisfazendo a condição de Rankine-Hugoniot. A seguir são apresentadas condições que permitem escolher entre as soluções aquela que seja fisicamente correta.

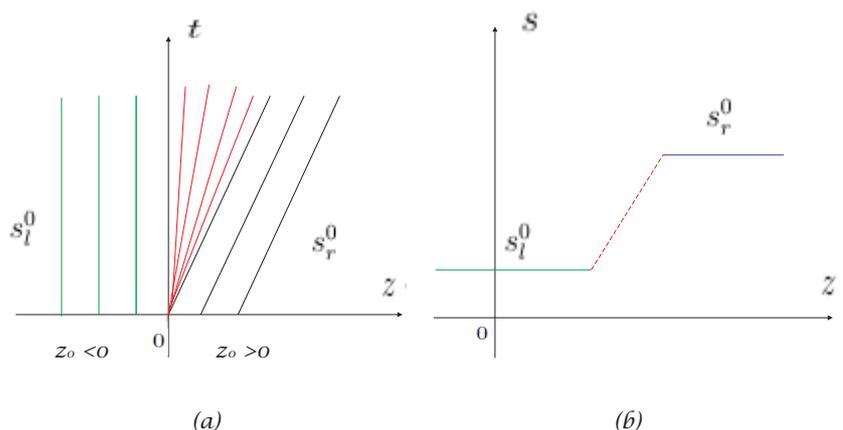


Figura 2.2: (a) Regiões não definidas pelas características. (b) Perfil da solução tipo onda de rarefação. Fonte: van Duijn [19].

2.2.2 Critérios de Entropia

As soluções fracas além de poderem conter descontinuidades da própria condição inicial que são propagadas, estas podem conter descontinuidades da interseção das características. Assim, para se obter a solução que seja fisicamente correta é necessário uma condição a mais conhecida como **critério de entropia**.

O primeiro critério de entropia a ser definido é o critério de Lax para leis de conservação escalares. O mesmo permite escolher a solução que seja fisicamente correta para casos em que a função de fluxo for convexa.

Definição 2.2.3 *Condição de entropia de Lax-* Uma onda de choque é dita satisfazer a condição de entropia de Lax para uma lei de conservação escalar com $F''(s) > 0$ para todo s , se [18]:

$$F'(s_l) > \sigma > F'(s_r).$$

De uma maneira geral, para qualquer função de fluxo F convexa, qualquer salto de s_l para s_r com $s_l > s_r$ que satisfaz a condição de Rankine-Hugoniot, satisfaz a condição de entropia devido a Lax e qualquer salto de s_l para s_r com $s_l < s_r$ que satisfaz a condição de Rankine-Hugoniot, não satisfaz a condição de entropia de Lax. Pode-se garantir unicidade para a solução (5.5) a partir deste critério [18, 19, 4, 20].

Uma condição de entropia mais geral é devido a Oleinik. Este critério permite obter a solução fisicamente correta mesmo para os casos em que F é uma função não-convexa. É possível mostrar que o critério de Oleinik se reduz ao critério de Lax quando se tem F convexa. A condição de Oleinik é definida como segue.

Definição 2.2.4 *Condição de entropia de Oleinik-* Se $s : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ é a solução entrópica de (2.16), então todas as discontinuidades tem a seguinte propriedade:

$$\frac{F(s) - F(s_l)}{s - s_l} \geq \sigma \geq \frac{F(s) - F(s_r)}{s - s_r}, \quad (2.21)$$

para todo s entre s_l e $s_r \in \mathbb{R}$.

Através do critério de Oleinik é possível mostrar que (2.20) é a única solução entrópica para o caso em que $s_l^0 < s_r^0$ e F é convexa [18, 19, 12, 11]. A seguir é apresentado um processo que permite obter uma condição de entropia equivalente a de Oleinik para o caso escalar.

- **Critério do perfil viscoso**

Uma forma padrão para se obter uma desigualdade de entropia é regularizar a equação diferencial hiperbólica adicionando um pequeno termo de difusão linear [18, 4]:

$$\frac{\partial}{\partial t}(s) + \frac{\partial}{\partial z}F(s) = \varepsilon \frac{\partial^2}{\partial z^2}(s), \quad (2.22)$$

onde $\varepsilon > 0$. Esta forma de regularizar o problema está bem estabelecida do ponto de vista matemático, apesar de ser menos satisfatório do ponto de vista físico. Para este é mais adequado utilizar o termo de difusão capilar para regularizar o problema [8]. Para o caso

escalar é possível mostrar que estes dois critérios são equivalentes à condição de Oleinik, portanto faz-se uma apresentação do critério do perfil viscoso apenas para evidenciar a busca por uma onda viajante como solução.

Considere o PVI (2.16), onde $F \in C(\mathbb{R})$, a ele está associado a lei de conservação viscosa (2.22) com:

$$\begin{aligned} s(-\infty, t) &= s_l, \\ s(+\infty, t) &= s_r, \end{aligned} \quad (2.23)$$

para todo $t > 0$.

Considere uma solução do tipo onda viajante para (2.22), isto é, existe uma função u tal que:

$$s(z, t) = u(\eta), \quad \text{onde } \eta = \frac{z - \sigma t}{\varepsilon}. \quad (2.24)$$

Ao substituir (2.24) em (2.22), obtém-se:

$$\begin{cases} \frac{-\sigma}{\varepsilon}u' + \frac{1}{\varepsilon}(F(u))' = \frac{\varepsilon}{\varepsilon^2}u'' \\ u(-\infty) = s_l, \quad u(+\infty) = s_r, \end{cases} \quad (2.25)$$

o que implica que;

$$\begin{cases} -\sigma u' + (F(u))' = u'' \\ u(-\infty) = s_l, \quad u(+\infty) = s_r. \end{cases} \quad (2.26)$$

Integrando (2.26), tem-se o seguinte problema de contorno (PVC):

$$\begin{cases} u'(\eta) = F(u(\eta)) - \sigma u(\eta) - A, \text{ sendo } A \text{ uma constante de integração} \\ u(-\infty) = s_l, \quad u(+\infty) = s_r, \\ s_l \neq s_r. \end{cases} \quad (2.27)$$

Para determinar σ e A recorre-se ao teorema abaixo para verificar que $u'(\pm\infty) = 0$.

Teorema 2.2.2 *Assuma que a função $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ seja diferenciável e que ambos $u(z)$ e $u'(z)$ tem um limite quando z vai para o infinito. Então $\lim_{z \rightarrow \infty} u'(z) = 0$.*

Assim, tem-se:

$$\sigma = \frac{F(s_r) - F(s_l)}{s_r - s_l}, \quad A = \frac{F(s_r)s_r - F(s_l)s_l}{s_r - s_l}. \quad (2.28)$$

Onde σ determina a velocidade da onda viajante. Destaca-se o fato da expressão para σ não depender de ε e coincidir com a velocidade de choque dada pela condição de Rankine-Hugoniot. Baseados em (2.28) o PVC (2.27) é reduzido a:

$$u'(\eta) = -\sigma u(\eta) + F(u(\eta)) + \frac{F(s_l)s_r - F(s_r)s_l}{s_r - s_l}. \quad (2.29)$$

Ao somar $F(s_l) - F(s_l)$ em (2.29) e através de um processo análogo somando $F(s_r) - F(s_r)$ em (2.29), obtém-se:

$$u'(\eta) = F(u(\eta)) - F(s_l) - \sigma(u(\eta) - s_l), \quad (2.30)$$

$$u'(\eta) = F(u(\eta)) - F(s_r) - \sigma(u(\eta) - s_r). \quad (2.31)$$

Pelo teorema da existência e unicidade de uma EDO, afirma-se que existe uma solução u única e estritamente monótona compreendida entre s_l e s_r . Caso não fosse estritamente monótona, existiria s^* entre s_l e s_r tal que $u'(s^*) = 0$, assim u não cumpriria as condições de contorno (2.23), visto que, não seria possível ligar os estados s_l e s_r .

Portanto, tem-se as seguintes hipóteses:

- Se $s_l < u < s_r$, então $u'(\eta) > 0$ e de (2.30), obtém-se;

$$\frac{F(s) - F(s_l)}{s - s_l} > \sigma = \frac{F(s_r) - F(s_l)}{s_r - s_l} > \frac{F(s) - F(s_r)}{s - s_r}, \quad (2.32)$$

- Se $s_l > u > s_r$, então $u'(\eta) < 0$ e de (2.30), obtém-se;

$$\frac{F(s) - F(s_l)}{s - s_l} > \sigma = \frac{F(s_r) - F(s_l)}{s_r - s_l} > \frac{F(s) - F(s_r)}{s - s_r}, \quad (2.33)$$

As expressões obtidas em (2.32) e (2.33) mostram que a condição de entropia segundo o critério do perfil viscoso para o caso escalar é equivalente à condição de entropia de Oleinik [19]. Tais condições garantem a existência de uma onda viajante conectando os estados s_l quando $\eta = \frac{z - \sigma t}{\varepsilon} \rightarrow -\infty$ e s_r quando $\eta = \frac{z - \sigma t}{\varepsilon} \rightarrow +\infty$.

As restrições dadas pela definição da condição de entropia de Oleinik e a obtida pelo critério do perfil viscoso são equivalentes e permitem mostrar que mesmo para $F(s)$ não convexo, que a solução do problema de Riemann (2.16) é única e é sempre constituída por uma sucessão de ondas de choque e rarefação. A seguir faz uma exposição através de

exemplos da construção geométrica clássica de Oleinik para os casos em que $F(s)$ é não convexo [18, 4, 12, 9].

2.2.3 Soluções de Riemann para Função de Fluxo Não-Convexa

• Construção Geométrica da Solução

Considere por simplicidade $F \in C^2([0, 1])$ uma função do tipo côncava-convexa³ e com as seguintes propriedades:

$$\left\{ \begin{array}{l} F(0) = 0; \quad F(1) = 1; \\ F'(s) > 0 \quad \text{para} \quad 0 < s < 1 \\ F''(s) > 0 \quad \text{para} \quad 0 < s < \tilde{s} \\ F''(s) < 0 \quad \text{para} \quad \tilde{s} < s < 1. \end{array} \right. \quad (2.34)$$

para algum $\tilde{s} \in (0, 1)$. Consideram-se dois casos para apresentar como as soluções são construídas.

Para o primeiro caso em que ($s_l^0 > s_r^0$) as soluções são obtidas através da construção da envoltória convexa para a função de fluxo F [11]. Onde a definição de envoltória convexa é dada a seguir.

Definição 2.2.5 *A envoltória (fecho) convexa do conjunto S_{conv} é o menor conjunto convexo, denotado por $H_C(S_{conv})$ que contém o conjunto original S_{conv} .*

Considere o ponto s_2 na Figura 2.3-(a) e $s_l^0 = 1$ e $s_r^0 = 0$, tal que:

$$\frac{F(s_2) - F(0)}{s_2 - 0} = \frac{F(s_2)}{s_2} = F'(s_2). \quad (2.35)$$

Ao analisar o limite superior da envoltória convexa na Figura 2.3-(a), nota-se que ele é composto por um segmento de reta de $(0, 0)$ até $(s_2, F(s_2))$ e depois segue que $y = F(s)$ até $(1, 1)$. O ponto s_2 é um ponto de tangência entre o segmento de reta e a função de

³Geometricamente uma função $F : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ é dita côncava quando seu gráfico se situa acima de qualquer de suas secantes, mais precisamente para $x, y \in (a, b)$ e $x < t < y$, então o ponto $(t, F(t))$ encontra-se acima da reta que conecta os pontos $(x, F(x))$ e $(y, F(y))$.

Uma função $F(a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ é dita côncava-convexa quando existe $t \in (a, b)$ tal que F é côncava em (a, t) e F é convexa em (t, b) , ou F é convexa em (a, t) e F é côncava em (t, b) .

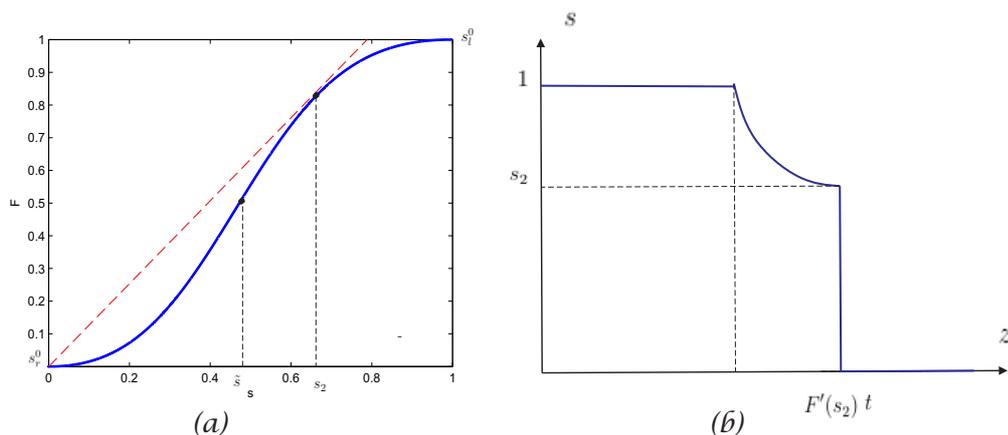


Figura 2.3: (a) Construção da solução entrópica através da envoltória convexa (b) Perfil da solução para um tempo t . Fonte: van Duijn [19].

fluxo F e é, precisamente, o ponto em que a velocidade da onda de choque conectando $s = 0$ com $s = s_2$ e onda de rarefação (leque abrangendo todos os estados entre $s = s_2$ e $s = 1$) coincidem. A linha reta representa o choque e a curva em que $y = F(s)$ representa a onda de rarefação.

Na Figura 2.3-(b) apresenta-se o perfil da solução para um tempo t . A mesma consiste de um estado constante ($s = 1$), seguido por uma onda de rarefação que conecta 1 e s_2 , seguida por um choque conectando s_2 a outro estado constante ($s = 0$).

Tal solução atende a desigualdade de entropia. É importante mencionar que outros valores de s_2 levariam a uma contradição na solução. Se $F'(s_2^+) < \frac{F(s_2^+)}{s_2^+}$, tal que $s_2^+ > s_2$, então a solução violaria a condição de entropia de Oleinik. Se $F'(s_2^-) > \frac{F(s_2^-)}{s_2^-}$, tal que $s_2^- < s_2$, então se teria uma solução multivaluada. Na Figura 2.4, mostra-se como seria o perfil da solução para estas duas hipóteses.

Para o caso em que ($s_l^0 < s_r^0$) as soluções segundo a construção geométrica de Oleinik são obtidas através da construção da envoltória côncava para a função de fluxo F [11].

Definição 2.2.6 A envoltória (fecho) côncava do conjunto S_{conc} é o menor conjunto côncavo, denotado por $H_c(S_{conc})$ que contém o conjunto original S_{conc} .

Considere o ponto s_1 , $s_l^0 = 0$ e $s_r^0 = 1$, tal que:

$$\frac{F(1) - F(s_1)}{1 - s_1} = \frac{1 - F(s_1)}{1 - s_1} = F'(s_1). \quad (2.36)$$

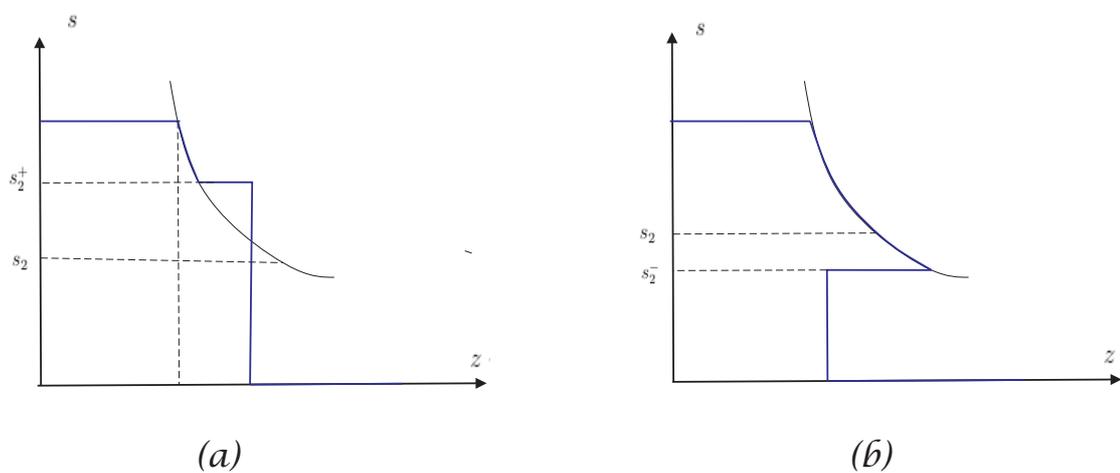


Figura 2.4: Soluções não entrópicas para valores de s_2 em (a) e (b) que não satisfazem a (2.35). Fonte: van Duijn [19].

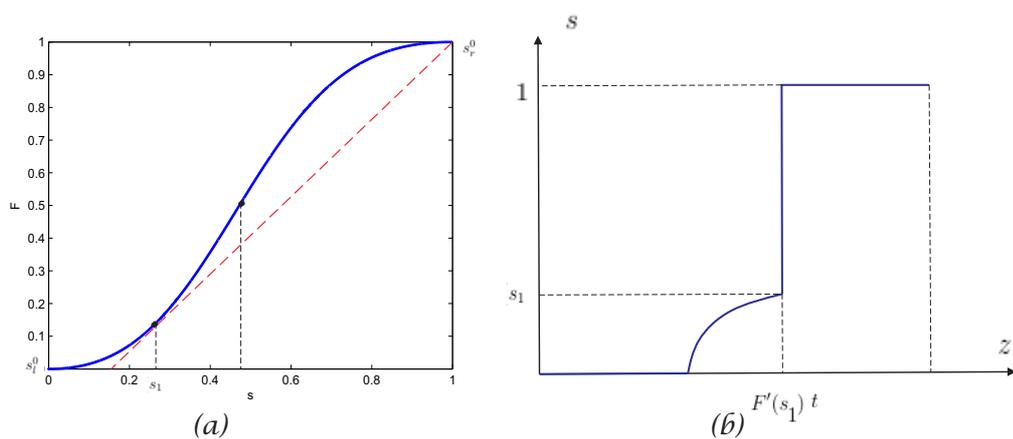


Figura 2.5: Em (a) apresenta-se a construção da solução entrópica através da envoltória côncava e em (b) o perfil da solução para um determinado tempo t . Fonte: van Duijn [19].

Pela Figura 2.5 tem-se que a solução é dada por um estado constante ($s = 0$), seguido de uma onda de rarefação conectando este estado e s_1 , seguido por um choque adjacente conectando s_1 e $s = 1$.

Tanto para o primeiro caso quanto para o segundo caso, pode-se verificar que esta construção corresponde à única solução entrópica. Essa construção geométrica clássica de Oleinik permite a obtenção da solução entrópica sempre que o fluxo for uma função contínua.

No capítulo seguinte apresenta-se, brevemente o esquema numérico utilizado para resolução do modelo proposto no presente trabalho.

Capítulo 3

Um Esquema de Diferenças Finitas Através de uma Abordagem Lagrangeana-Euleriana

Neste capítulo apresenta-se o esquema de diferenças finitas que será utilizado na resolução numérica do problema proposto. Trata-se de um esquema definido na estrutura Lagrangeana-Euleriana com base no método de volumes finitos localmente conservativo. Tal esquema encontra-se definido em [13]. Expõem-se, a seguir, as justificativas para a escolha do método.

3.1 Justificativa

Uma das questões chave na resolução numérica de problemas de Cauchy, em que a lei de conservação apresenta função de fluxo descontínua é a presença de ondas estacionárias na solução [22, 23]. Algumas estratégias não preservam os estados estacionários discretos [21], por exemplo, aqueles que utilizam fluxo numérico tipo Godunov num método de volumes finitos e acoplam diferenças centradas para o termo fonte [21]. Devido a estas dificuldades, esquemas conhecidos como "well-balanced" têm sido propostos [13, 21, 22]. O método utilizado, no presente trabalho, é baseado em [13] que desenvolveu uma nova classe de esquemas Lagrangeanos-Eulerianos tipo diferenças finitas, que apresenta evidências de serem "well-balanced". Tais métodos são capazes de preservar o equilíbrio entre o termo fonte e o fluxo.

A nova classe de esquemas propostos em [13] apresentam certas similaridades com o esquema de Lax-Friedrichs, porém possuem como vantagem relevante lidar de maneira adequada com funções de fluxo descontínuas, isto é, preservam o estado de equilíbrio entre

fluxo e termo fonte.

Em [13] são apresentados dois esquemas para leis de conservação hiperbólicas, *LEH1* e *LEH2*, e dois para leis de balanço, *LEB1* e *LEB2*. Opta-se pelo uso dos métodos *LEH2* e *LEB2* por uma questão de simplicidade relacionada à definição das linhas de rastreamentos e implementação do fluxo numérico. A seguir são expostas, brevemente, a estrutura básica do método e as equações discretas para leis de conservação hiperbólicas.

3.2 O esquema Lagrangeano-Euleriano para Leis de Conservação Hiperbólicas

Para desenvolvimento do esquema Lagrangeano-Euleriano, considere o PVI (2.9) onde, $F(s)$ é uma função suave de s , $s = s(z, t)$. Para o processo de construção do esquema Lagrangeano-Euleriano é necessário escrever a equação diferencial de (2.9) num espaço-tempo localmente conservativo, na forma divergente generalizada, com $s(z, 0) = s_0$,

$$\nabla_{t,z} \cdot \begin{bmatrix} s \\ F(s) \end{bmatrix} = 0, \quad \text{em } \Omega. \quad (3.1)$$

A solução aproximada pelo esquema Lagrangeano-Euleriano é necessária um processo de discretização do domínio. Assim, substitui-se a região plana $\Omega := \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ por uma malha de $\mathbb{Z} \times \mathbb{N} = \{(j, n); j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots; n = 0, 1, 2, \dots\}$ e em vez de funções $s(\cdot, t) \in L^P(\mathbb{R})$ para todo $t \geq 0$, pode-se considerar sequências $S^n = (S^n)_j$, $j \in \mathbb{Z}$ para $n = 0, 1, 2, \dots$, para uma dada malha $h > 0$ e um nível de tempo $t^n = \sum_{i=0}^{n-1} \Delta t^i$, com $t^0 = 0$, para um passo de tempo não-constante Δt^i .

Em um determinado passo de tempo t^n , tem-se para discretização espacial que $z_j^n = jh$, $z_{j+1/2}^n = jh + h/2$, na malha uniforme original, onde $h_j^n = z_{j+1/2}^n - z_{j-1/2}^n = \Delta z^n = h$ para $j \in \mathbb{Z}$, além disso, os pontos $z_{j\pm 1/2}^n$ são pontos finais das células, veja [13, 10]. Para a evolução da solução no tempo, tem-se a malha não-uniforme dada por: $h_j^{n+1} = \bar{z}_{j+1/2}^{n+1} - \bar{z}_{j-1/2}^{n+1} = \bar{\Delta} z^{n+1}$ para o nível de tempo t^{n+1} . A solução em um tempo t^n é dada sobre a malha uniforme, ao passar para um tempo t^{n+1} a mesma evolui sobre a malha não-uniforme para depois ser, novamente, deslocada para a malha uniforme. Aqui, z_j^n e \bar{z}_j^{n+1} são os centros das células respectivamente. Pode-se, ainda, definir a solução numérica S nas células $[z_{j-1/2}^n, z_{j+1/2}^n]$ e $[\bar{z}_{j-1/2}^{n+1}, \bar{z}_{j+1/2}^{n+1}]$, por:

$$S(z_j, t^n) = S_j^n = \frac{1}{h} \int_{z_{j-1/2}^n}^{z_{j+1/2}^n} s(z, t^n) dz, \quad j \in \mathbb{Z} \quad (3.2)$$

$$\bar{S}(z_j, t^{n+1}) = S_j^{n+1} = \frac{1}{h_j^{n+1}} \int_{\bar{z}_{j-1/2}^{n+1}}^{\bar{z}_{j+1/2}^{n+1}} s(z, t^{n+1}) dz, \quad j \in \mathbb{Z} \quad (3.3)$$

respectivamente, e a condição inicial é $S(z_j^0, t^0) = S_j^0$ nas células $[z_{j-1/2}^0, z_{j+1/2}^0]$, [13].

Ao considerar volumes finitos com células centradas na estrutura Lagrangeana e fazer uso do teorema da divergência, [13] mostra que existe uma conservação local discreta sobre o volume finito (de controle) $(D_j^n = \{(z, t) / x_j^n(t) \leq z \leq x_{j+1}^n, t^n \leq t \leq t^{n+1}\})$ (veja Figura 3.1). Onde $x_j^n(t)$ é uma curva parametrizada tal que $x_j^n(t^n) = z_j^n$ e $\frac{dx_j^n(t)}{dt} = \frac{F(s)}{s}$ para $t^n \leq t \leq t^{n+1}$. A região D_j^n é chamada de "tubo integral".

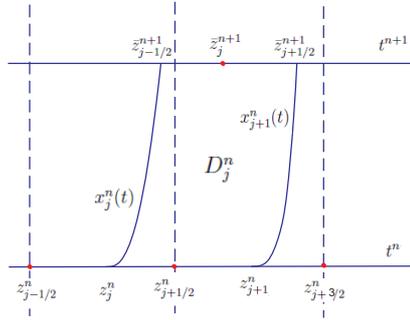


Figura 3.1: Volume de controle D_j^n ("tubo-integral") para conservação espaço-tempo na forma discreta. Fonte: Sepúlveda [13].

A conservação local é dada por:

$$\int_{\bar{z}_{j-1/2}^{n+1}}^{\bar{z}_{j+1/2}^{n+1}} s(z, t^{n+1}) dz = \int_{z_j^n}^{z_{j+1}^n} s(z, t^n) dz, \quad (3.4)$$

onde se define $\bar{z}_{j-1/2}^{n+1} = x_j^n(t^{n+1})$ e $\bar{z}_{j+1/2}^{n+1} = x_{j+1}^n(t^{n+1})$.

Através das definições de soluções numéricas (3.2), (3.3) e de (3.4), obtém-se uma aproximação local para a malha não uniforme \bar{S}_j^{n+1} , $j \in \mathbb{Z}$, que pode ser definida sobre a malha original por:

$$S_j^{n+1} = \frac{1}{h} [c_{0j} \bar{S}_{j-1}^{n+1} + c_{1j} \bar{S}_j^{n+1}]. \quad (3.5)$$

Onde, $c_{0j} = (\frac{h}{2} + g_j^n k^n)$, $c_{1j} = h - c_{0j} = (\frac{h}{2} - g_j^n k^n)$ e pode-se aproximar $g_j^n \approx \frac{F(s)}{s}$.

Uma observação importante em [13] é de que a quantidade não-linear $F(s)/s$ está relacionada à solução desconhecida s e como uma não pode ser encontrada exata, traça-se linhas de rastreamento das partículas de fluidos. Embora simples à primeira vista, não é bem entendido como definir uma robusta e eficiente aproximação para $F(s)/s$ por reconstruções não-lineares. Na Figura 3.2 tem-se um exemplo para a aproximação de

primeira ordem.

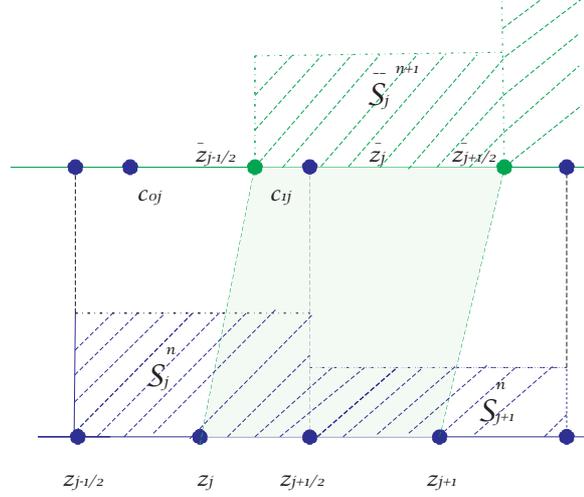


Figura 3.2: Aproximação por retas para g_j^n . Fonte: Sepúlveda [13].

As equações $x_j^n(t^n) = z_j^n$ e $\frac{dx_j^n(t)}{dt} = \frac{F(s)}{s}$ com (3.5) formam o bloco básico destes esquemas Lagrangeanos-Eulerianos.

Uma formulação numérica do esquema Lagrangeano-Euleriano para leis de conservação hiperbólicas não-lineares é chamada por [13] de *LEH2* (Esquema de Diferenças Finitas Lagrangeano-Euleriano) e é dado como segue:

$$S_j^{n+1} = \frac{1}{4}(S_{j-1}^n + 2S_j^n + S_{j+1}^n) - \frac{k}{2h}(F(S_{j+1}^n) - F(S_{j-1}^n)), \quad (3.6)$$

onde, $k = k^n$ e a condição CFL (veja, [13]) é dada por:

$$\max_j |F'(S_j^n) \frac{k}{h}| \leq \frac{2^{1/2}}{2}. \quad (3.7)$$

A equação (3.6) pode ser escrita também na forma conservativa:

$$S_j^{n+1} = S_j^n - \frac{k}{h}(\bar{F}(S_j^n, S_{j+1}^n) - \bar{F}(S_{j-1}^n, S_j^n)), \quad (3.8)$$

onde,

$$\bar{F}(S_j^n, S_{j+1}^n) = \frac{1}{4}[\frac{h}{k}(S_j^n - S_{j+1}^n) + 2(F(S_{j+1}^n) + F(S_j^n))]. \quad (3.9)$$

Uma extensão desse esquema (*LEH2*) foi feita em [13] para os casos em que a função de fluxo F apresenta descontinuidade em relação à variável espacial z . Assim, a equação

passa a ser dada por:

$$S_j^{n+1} = \frac{1}{4}(S_{j-1}^n + 2S_j^n + S_{j+1}^n) - \frac{k}{2h}(F(z_{j+1}, S_{j+1}^n) - F(z_{j-1}, S_{j-1}^n)), \quad (3.10)$$

onde, $F(z_{j-1}, S_{j-1}^n)$ e $F(z_{j+1}, S_{j+1}^n)$ são os fluxos descontínuos associados a consistência do fluxo numérico, veja [4, 22]. É importante destacar que tanto (3.6), quanto (3.10), podem ser escritas na forma conservativa e são encontradas em [13]. Em termos de implementação, quando a função de fluxo é descontínua torna-se necessário uma aproximação da mesma que seja capaz de captar, numericamente, tal descontinuidade. Assim, em encontram-se duas formas para esta aproximação. Neste trabalho, será considerada apenas a seguinte:

$$F_j^n = F(z_j, S_j^n) = \begin{cases} f(S_j^n), & j < 0, \\ \frac{1}{2}[f(S_j^n) + h(S_j^n)] + \frac{1}{2}\{f_{max}, h_{min}\}, & j = 0, \\ h(S_j^n), & j > 0, \end{cases} \quad (3.11)$$

onde, $f(S_j^n)$ e $h(S_j^n)$ são as funções de fluxo numérica à esquerda de $j = 0$ e à direita, respectivamente. Já $f_{max} = f(max\{s_f^*, S_1^n\})$ e $h_{min} = h(min\{s_h^*, S_{-1}^n\})$, sendo s_f^* e s_h^* os pontos de máximo de f e h , nessa ordem. Caso s_f^* e s_h^* sejam pontos de mínimo veja [24]. Considera-se como $z = 0$ o correspondente a $j = 0$ na malha. Na seção seguinte são expostas as equações discretas para o caso de leis de balanço, onde as mesmas são obtidas a partir de um processo análogo ao caso das leis de conservação hiperbólicas.

3.3 O esquema Lagrangeano-Euleriano para Leis de Balanço

Nesta seção apresentam-se a propriedade "well-balanced" e a equação discreta para resolução de leis de balanço. Tal propriedade "well-balanced" pode ser enunciada, formalmente, como segue. Considere a lei de balanço, tal como:

$$\frac{\partial}{\partial t}(s) + \frac{\partial}{\partial z}F(s) = Q(s), \quad (3.12)$$

denota-se s^ϵ a solução estacionária, que satisfaz a equação;

$$\frac{\partial}{\partial z}F(s^\epsilon) = Q(s^\epsilon) \quad (3.13)$$

diz-se que um esquema numérico é "well-balanced", se ele satisfaz, plenamente, uma versão discreta da equação de equilíbrio (3.13). Se um método é "well-balanced", o

erro de truncamento de soluções perto do estado de equilíbrio não pode ser maior que $s(z, t) - s^\epsilon(z)$.

Considere o PVI:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}(s) + \frac{\partial}{\partial z}F(s) = Q(s), \text{ em } \Omega \\ s(z, 0) = s_0(z), \end{cases} \quad (3.14)$$

onde, se assume que $\int \int_{D_j^n} Q(s) dz dt < \infty$. Escrevendo a primeira equação de (3.14) na forma divergente, tem-se:

$$\nabla_{t,z} \cdot \begin{bmatrix} s \\ F(s) \end{bmatrix} = Q(s), \quad \text{em } \Omega. \quad (3.15)$$

com $s(z, 0) = s_0$. Utilizando os mesmos argumentos que na seção anterior para leis de conservação hiperbólicas, isto é, escreve-se (3.15) sobre um espaço-tempo localmente conservativo e aplica-se o teorema da divergência na forma discreta da equação (3.15) para um "tubo-integral" e logo depois recorre-se aos limites $x_j^n(t)$, tem-se:

$$\int_{\bar{z}_{j-1/2}^{n+1}}^{\bar{z}_{j+1/2}^{n+1}} s(z, t^{n+1}) dz = \int_{z_j^n}^{z_{j+1}^n} s(z, t^n) dz + \int \int_{D_j^n} Q(s) dz dt. \quad (3.16)$$

A equação (3.16) pode ser vista como a relação de conservação local para a lei de balanço, assim, usa-se a mesma para definir a solução sobre a malha não-uniforme:

$$\bar{S}_j^{n+1} = \frac{1}{h_j^{n+1}} \int_{\bar{z}_{j-1/2}^{n+1}}^{\bar{z}_{j+1/2}^{n+1}} s(z, t^{n+1}) dz = \frac{1}{h_j^{n+1}} \left[\int_{z_j^n}^{z_{j+1}^n} s(z, t^n) dz + \int \int_{D_j^n} Q(s) dz dt \right], \quad (3.17)$$

e sua associada projeção sobre a malha original (uniforme),

$$S_j^{n+1} = \frac{1}{h} \left[\left(\frac{h}{2} + g_j^n k \right) \bar{S}_{j-1}^{n+1} + \left(\frac{h}{2} - g_j^n k \right) \bar{S}_j^{n+1} \right]. \quad (3.18)$$

De(3.17) e (3.18), consegue-se obter a seguinte equação discreta para o esquema tipo diferenças finitas, chamado em [13] de *LEB2* (Esquema de Diferenças Finitas Lagrangeano-Euleriano para Leis de Balanço):

$$\begin{aligned} S_j^{n+1} = & \frac{1}{4}(S_{j-1}^n + 2S_j^n + S_{j+1}^n) - \frac{k}{2h}(F(S_{j+1}^n) - F(S_{j-1}^n)) + \\ & + \frac{1}{h} \left[\left(\frac{h}{2} + g_j^n k \right) \int \int_{D_{j-1}^n} Q(s(z, t)) dz dt + \left(\frac{h}{2} - g_j^n k \right) \int \int_{D_j^n} Q(s(z, t)) dz dt \right], \end{aligned} \quad (3.19)$$

com CFL dado por:

$$\frac{\max\{\max_j\{F'(S_j)\}, \max\{g_j^n\}\}k}{h} \leq \frac{2^{1/2}}{2}. \quad (3.20)$$

Claramente, o ponto chave aqui é como conceber uma discretização de certa maneira que mantenha um equilíbrio preciso entre o gradiente da função de fluxo e o termo fonte. Para a hipótese de que Q é uma função explícita apenas de z e t , [13] apresenta dois métodos numéricos de integração (método dos trapézios e do ponto médio) que permite manter tal equilíbrio. Neste trabalho utiliza-se apenas a aproximação através do método do ponto médio, porém detalhes de como obter a fórmula e também para método dos trapézios pode ser encontrado em [13]. O termo $\int \int_{D_{j-1}^n} Q(s(z, t)) dz dt$ pode ser aproximado por:

$$\int \int_{D_{j-1}^n} Q(s(z, t)) dz dt \simeq khQ\left(z_j^n + \frac{1}{2}(g_j^n k + h), t^n + \frac{k}{2}\right). \quad (3.21)$$

A seguir são descritos breves comentários sobre a implementação utilizada para validação do código computacional.

3.4 Implementação

Os métodos numéricos de diferenças finitas apresentados *LEH2* e *LEB2* são métodos numéricos explícitos¹ os mesmos não apresentam grandes dificuldades em termos de implementação, entretanto é necessário que a condição *CFL* seja atendida para garantir a estabilidade do método. Na Figura 3.3 encontra-se o diagrama do algoritmo computacional para resolução de PVI com o auxílio dos métodos *LEH2* e *LEB2*.

Os algoritmos computacionais desenvolvidos no presente trabalho seguem a mesma metodologia e o procedimento numérico que podem ser visto conforme o diagrama de blocos na Figura 3.3. Além deste, são apresentados dois algoritmos (veja anexo) que permitem uma melhor compreensão da implementação do método. Todos os códigos foram implementados em MATLAB[®].

Uma observação a ser feita tanto para implementação de *LEH2* e *LEB2* é que quando a função de fluxo $F(s)$ é descontínua, faz-se necessário o uso de um fluxo numérico con-

¹Classificam-se os métodos numéricos para resolução de equações diferenciais em dois grupos: métodos explícitos e métodos implícitos. Os métodos explícitos, normalmente, são mais simples de serem implementados computacionalmente, porém possuem critérios de estabilidade mais restritivos, por exemplo a condição *CFL*. Os métodos implícitos apesar de possuírem um grau de dificuldade maior em termos de implementação, são menos restritivos [14].

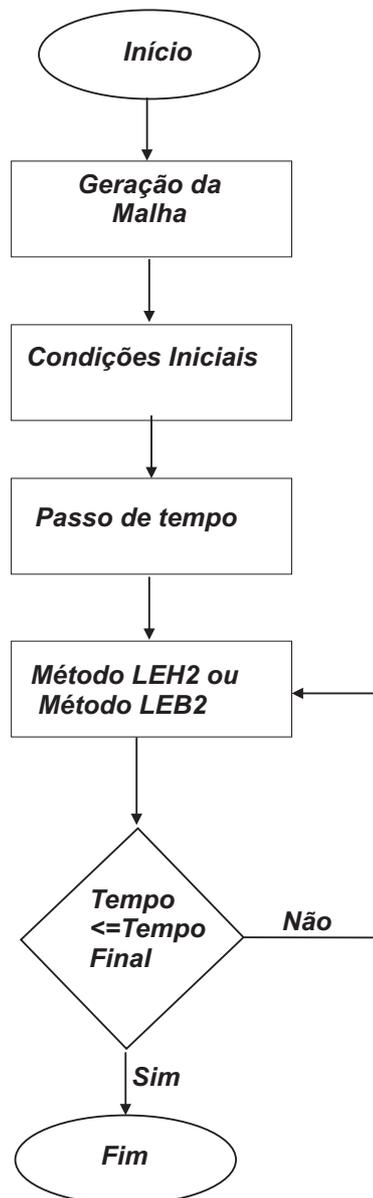


Figura 3.3: Algoritmo computacional para resolução de problemas de Cauchy com o auxílio dos esquemas *LEH2* e *LEB2*.

sistente do tipo (3.11) que capture tal descontinuidade. A seguir são apresentados três exemplos para validação do código computacional cujas soluções são conhecidas em literatura.

3.5 Validação do Código

Para validar o código computacional implementado para os métodos *LEH2* e *LEB2* são apresentados dois exemplos; o primeiro é a equação de Buckley-Leverett sem gravidade, o segundo uma lei de conservação com função de fluxo côncava-convexa não-mônota. Para ambos os casos as soluções numéricas são "comparadas" com as analíticas entrópicas, as quais são obtidas pela construção geométrica baseada no critério de entropia de Oleinik. Um terceiro e último exemplo para validação, apresenta uma função de fluxo descontínua, o que em termos de implementação representa uma dificuldade numérica similar ao problema estudado neste trabalho. Após o processo de validação conseguimos verificar que o código computacional está funcionando de maneira eficiente e assim podemos utilizar a mesma estrutura de implementação para nosso problema, que acrescenta um termo fonte singular que deverá ser regularizado de maneira conveniente.

• Equação de Buckley-Leverett

Considere o Problema de Riemann (2.16) com fluxo dado por:

$$F(s) = \frac{s^2}{s^2 + a(1-s)^2}, \quad \text{com } s \in [0, 1] \quad (3.22)$$

A constante "a" representa a razão entre as viscosidades dos fluidos imiscíveis [1, 5]. Esta equação é conhecida como a Equação de Buckley-Leverett. Consideram-se dois Problemas de Riemann para validar o código computacional:

$$\text{PR} - 1 : s_0(z, t = 0) = \begin{cases} 1, & z < 0, \\ 0, & z > 0, \end{cases} \quad (3.23)$$

$$\text{PR} - 2 : s_0(z, t = 0) = \begin{cases} 0, & z < 0, \\ 1, & z > 0. \end{cases} \quad (3.24)$$

É conhecido que as soluções desses problemas de Riemann podem-ser obtidas a partir da construção clássica de Oleinik, como mostrado na Figura 3.4.

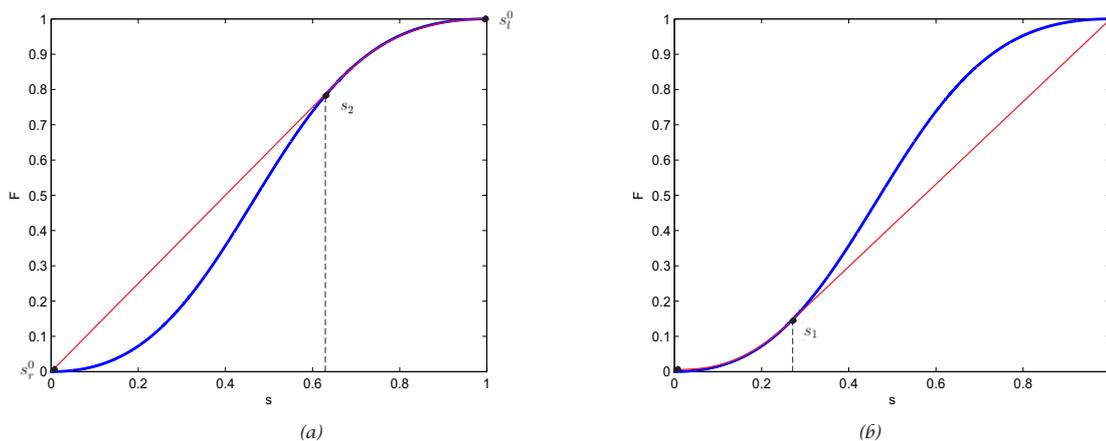


Figura 3.4: Construção da solução entrópica através da envoltória convexa para o PR-1 em (a) e envoltória côncava para o PR-2 em (b).

As velocidades dos choques são determinadas pela condição de salto de Rankine-Hugoniot (2.14) e coincidem com a inclinação das retas desenhadas na Figura 3.4, enquanto as velocidades presentes nas ondas de rarefações são dadas por $F'(s)$ quando s percorre o intervalo $[s_2, 1]$ em (a) e $s \in [0, s_1]$ em (b).

Na Figura 3.5 apresentam-se tanto as soluções analíticas entrópicas quanto as numéricas obtidas com o esquema LEH2 implementado no presente trabalho.

Percebe-se que numericamente o esquema apresenta convergência para a solução entrópica. O mesmo foi capaz de capturar as ondas de choque com boa precisão. A seguir expõe-se um outro caso cuja solução analítica é conhecida.

• Fluxo côncavo-convexo não-monótono

Outro exemplo para validação pode ser dado resolvendo o problema de Riemann (2.16) com a seguinte função de fluxo:

$$F(s) = 0,5(e^{-25(s-0,5)^2} + 8(s - 0,5)^2), \quad \text{com } s \in [0, 1]. \quad (3.25)$$

Este segundo exemplo, diferentemente, do anterior apresenta função de fluxo não-monótona, porém por se tratar de um fluxo contínuo pode-se também utilizar a construção de Oleinik e obter o perfil da solução analítica entrópica. Na Figura 3.6, encontra-se a

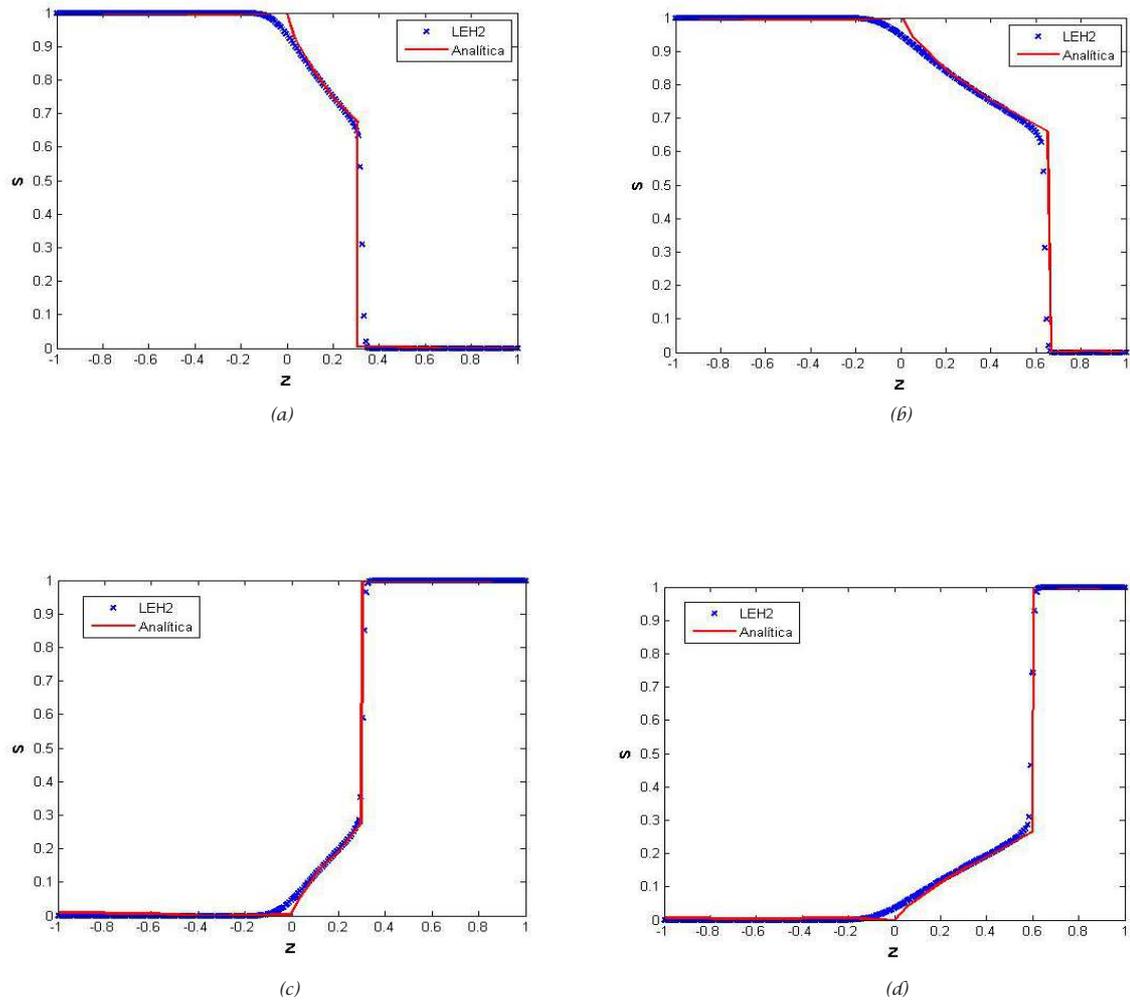


Figura 3.5: Comparação das soluções numéricas e analíticas. Os casos (a) e (b) correspondem ao PR-1 em distintos tempos $t = 0.25$ e $t = 0.5$, respectivamente. Os casos (c) e (d) correspondem ao PR-2 nos tempos $t = 0.25$ e $t = 0.5$. Foi utilizado $CFL = 0.3$ e 256 nodos.

construção da envoltória convexa para os seguintes dados de Riemann:

$$\text{PR} - 3 : s_0(z, t = 0) = \begin{cases} 0.8, & z < 0, \\ 0.2, & z > 0, \end{cases} \quad (3.26)$$

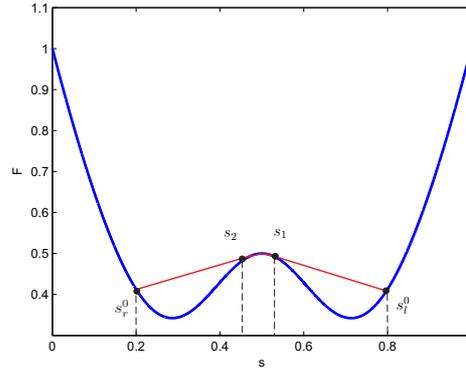


Figura 3.6: Construção da envoltória convexa através do gráfico da função de fluxo (3.25) para o $PR - 3$.

Do ponto de vista numérico percebe-se novamente, que o método está convergindo para a solução entrópica, como no caso anterior. Os choques estão se propagando com velocidades esperadas de acordo com a condição de Rankine-Hugoniot e as velocidades das ondas de rarefações são dadas por $F'(s)$ para $s \in [s_2, s_1]$. Na Figura 3.7, apresentam-se as soluções numérica e analítica para condição inicial de $s_l^0 = 0,8$ e $s_r^0 = 0,2$.

• Função de fluxo descontínua

O último exemplo usado para a validação do código tem como semelhança ao nosso modelo uma descontinuidade no fluxo em relação à variável espacial. Este exemplo pode ser interpretado como um experimento idealizado para o escoamento de dois fluidos na vertical em um meio poroso, onde este é constituído por dois tipos diferentes de rocha, tal fato cria uma descontinuidade em $z = 0$ [22, 24]. A parte superior é modelada com a função F_l , enquanto a inferior com a função F_r . Tais funções são definidas como segue:

$$F_l(s) = \frac{50s^2(5(1-s)^2)}{50s^2 + 5(1-s)^2}, \quad z < 0, \quad (3.27)$$

$$F_r(s) = \frac{10s^2(20(1-s)^2)}{10s^2 + 20(1-s)^2}, \quad z > 0. \quad (3.28)$$

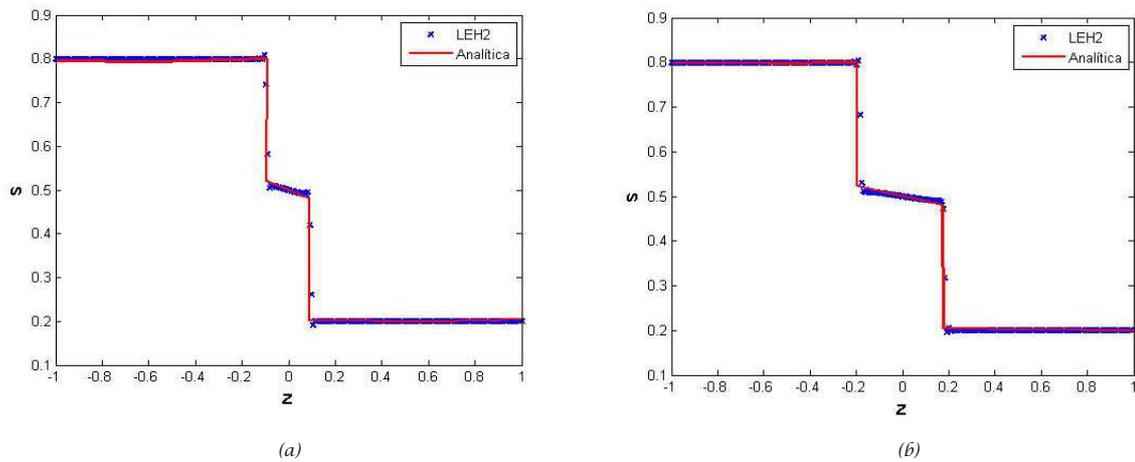


Figura 3.7: Comparação das soluções numéricas e analíticas. Para os casos (a) e (b), utiliza-se $CFL = 0.68$ e 256 nodos, sendo que para (a) a solução foi obtida para um tempo de 0.3, enquanto para (b) $t = 0.6$.

Os gráficos para estes dois fluxos podem ser vistos na Figura 3.8. Uma solução analítica para este problema pode ser obtida por uma extensão do método de Oleinik "conectando" de maneira conveniente os dois fluxos, ver Kaasschieter [8]. Na mesma figura apresenta-se a construção geométrica da solução para os dados de Riemann do tipo (3.23).

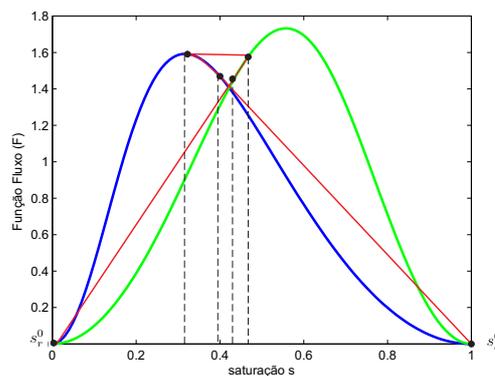


Figura 3.8: Gráfico para as funções F_l e F_r e extensão da construção clássica de Oleinik segundo Kaasschieter [8].

Em termos de solução numérica, compara-se a obtida pelo método LEH2 com a que se faz presente no trabalho de [13].

Os bons resultados obtidos nos três exemplos apresentados, mostram que o código computacional está obtendo as soluções que são esperadas pela literatura, assim pode-

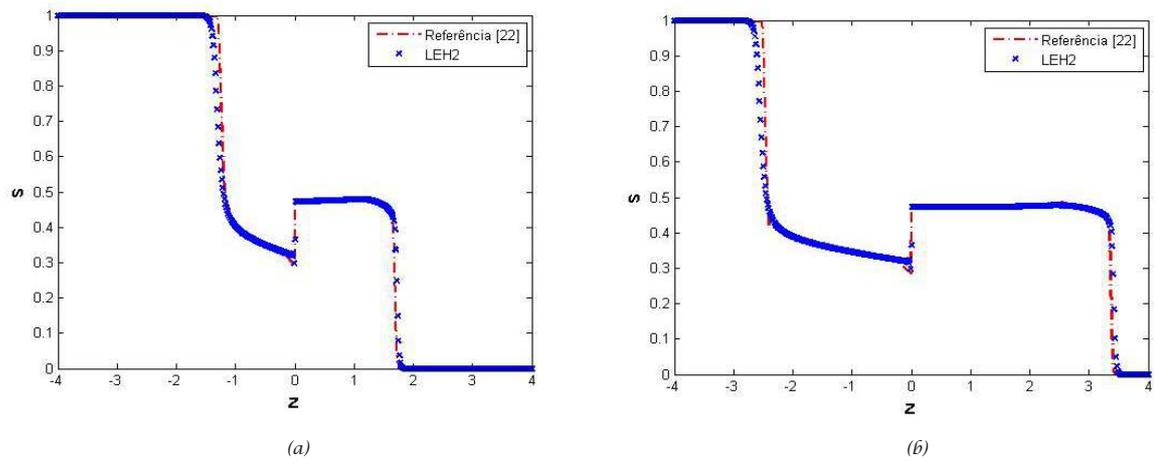


Figura 3.9: Comparação das soluções numéricas e analíticas. Para os casos (a) e (b) utilizamos $CFL = 0.1$ e 513 nodos, sendo que para (a) a solução foi obtida para um tempo de 0.5, enquanto para (b) $t = 1$.

se utilizar da mesma estrutura do algoritmo como base para a resolução numérica do problema proposto no presente trabalho. No capítulo a seguir faz-se a apresentação do modelo para descrever o escoamento vertical bifásico sobre a ação do termo fonte do tipo delta de Dirac.

Capítulo 4

O Modelo

Neste capítulo apresenta-se um modelo matemático para estudar um escoamento bifásico em um meio poroso homogêneo, considerando além da ação da gravidade um termo de fonte singular. Para obtenção do modelo faz-se uma dedução similar a apresentada em [1] e utiliza-se as mesmas notações encontradas em Rodríguez-Bermudez [1], o qual estudou um escoamento trifásico levando em consideração a presença da gravidade, mas sem termo fonte. No presente trabalho tem-se interesse em estudar apenas o escoamento entre dois fluidos imiscíveis, exemplo água (w) e óleo (o), considerando apenas uma única dimensão espacial (eixo vertical z). Na segunda parte deste capítulo faz-se um processo de adimensionalização da equação obtida para fins de estudo semianalítico e numérico.

4.1 Modelo Matemático

Modelos matemáticos para estudar escoamentos em reservatórios de petróleo têm sido desenvolvidos a partir do século XIX, Chen [1, 5, 23]. O escoamento bifásico para fluidos em meios porosos pode ser modelado por uma lei de balanço de massa e uma equação de conservação de momentum, sendo que esta para meios porosos é dada na forma da lei de Darcy. No presente trabalho considera-se o escoamento de dois fluidos em um meio poroso homogêneo, veja Dake [2], e a presença da ação da aceleração da gravidade (g), considerando assim que o reservatório se encontra na posição vertical. É considerado também a presença de um termo de fonte do tipo δ de Dirac, que representa uma injeção pontual no ponto $z = 0$. Para o desenvolvimento do modelo são consideradas as seguintes hipóteses: o escoamento é isotérmico; a porosidade do meio é constante, veja Dake [2]; o fluido ocupa todo o espaço poroso da rocha; as fases são imiscíveis; os efeitos de compressibilidade das fases e da rocha e os efeitos de pressão capilar entre as fases são

desprezados. Assim, baseados nessas hipóteses, pode-se escrever as seguintes equações no sistema de coordenadas cartesianas para que a força gravitacional aponte na mesma direção que o eixo positivo de z [13].

A equação de balanço de massa para cada fase $i = w, o$ [11]:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\phi\rho_i s_i) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho_i v_i) = Q_i. \quad (4.1)$$

onde:

$$Q_i = \rho_i q_i \delta(z). \quad (4.2)$$

Onde, ϕ é a porosidade, ρ_i , s_i , v_i , representam: a densidade, a saturação e a velocidade; da fase i , respectivamente. Onde, q_i é uma constante positiva que representa a frequência de injeção, Q_i é o termo fonte e z como já mencionada é a variável espacial cujo eixo positivo aponta para baixo, portanto em nossa convenção ondas com velocidades positivas viajam para baixo, enquanto ondas com velocidades negativa para cima.

A lei de Darcy para cada fase $i = w, o$:

$$v_i = -K \frac{k_i}{\mu_i} (\nabla p_i - \rho_i g e_z). \quad (4.3)$$

Onde, K representa a permeabilidade absoluta da rocha, k_i , μ_i , p_i representam a permeabilidade relativa, a viscosidade e a pressão, da fase i , respectivamente. O termo g é a aceleração da gravidade e e_z um vetor unitário com sentido positivo para baixo. Assume-se que as permeabilidades relativas k_i são funções das saturações. O meio é totalmente saturado, isto é, $\sum s_i = 1$, para $i = w, o$. E por simplicidade considera-se as viscosidades μ_i , $i = w, o$ constantes.

Pode-se definir também as seguintes equações:

$$\lambda_i = \frac{k_i}{\mu_i}, \text{ para } i = w, o; \quad \lambda = \sum \lambda_i, \quad (4.4)$$

$$f_i = \frac{\lambda_i}{\lambda}, \text{ para } i = w, o; \quad v = \sum v_i; \quad (4.5)$$

onde, as funções λ_i e f_i são a mobilidade e função de fluxo fracionária correspondente para cada fase i , respectivamente. Tem-se λ representando a mobilidade total e v a velocidade total de Darcy [1]. Nota-se de (4.5) que $\sum f_i = 1$ para $i = w, o$. Dá hipótese de negligenciar a pressão de capilaridade tem-se $p_i = p_j$. Ao substituir (4.3) em (4.5) e realizar alguns cálculos obtém-se que:

$$v_i = v f_i + K \lambda_i f_i \rho_i g e_z, \quad (4.6)$$

onde, $\rho_{ij} = \rho_i - \rho_j$ para as fases i e j , é importante destacar que a velocidade é dada para cada fase, $i \neq j$ [1]. Outro fator importante a ser destacado é que a velocidade para cada fase depende da velocidade total de Darcy v , esta pode ser determinada abaixo utilizando a lei de balanço de massa.

Como na hipótese foi considerado que a densidade é constante para cada fase $i = w, o$ e a porosidade ϕ também a equação de balanço de massa pode ser escrita da seguinte forma:

$$\phi \frac{\partial}{\partial t}(s_i) + \frac{\partial}{\partial z}(v_i) = q_i \delta(z). \quad (4.7)$$

Ao somar (4.7) para a fase $i = w$ com $i = o$, obtém-se:

$$\phi \frac{\partial}{\partial t}(s_w + s_o) + \frac{\partial}{\partial z}(v_w + v_o) = (q_w + q_o) \delta(z), \quad (4.8)$$

como o meio é totalmente saturado $s_w + s_o = 1$ e de (4.5) chega-se que:

$$\frac{\partial v}{\partial z} = q \delta(z), \quad (4.9)$$

onde, $q = \sum q_i$ para $i = w, o$. Ao integrar (4.9) em relação a z e tomar como base a teoria das distribuições de Schwartz [24], chega-se a:

$$v(z) = qH(z) + d, \quad (4.10)$$

onde, $H(z)$ é a função de Heaviside e d uma constante de integração.

$$H(z) = \begin{cases} 0, & z < 0, \\ 1, & z > 0, \end{cases} \quad (4.11)$$

Ao (4.10) em (4.6), obtém-se:

$$v_i = [qH(z) + d]f_i + K\lambda_i f_i \rho_{ij} g e_z, \quad (4.12)$$

Ao substituir (4.5) em (4.12) e tomar em conta as definições em (4.4) e (4.12), chega-se ao modelo proposto a ser estudado nesse trabalho na forma dimensional:

$$\phi \frac{\partial}{\partial t}(s_i) + \frac{\partial}{\partial z}(F_i(z, s_i)) = q_i \delta(z), \quad \text{para } i = w, o. \quad (4.13)$$

Com função de fluxo dada por,

$$F_i(z, s_i) = (qH(z) + d) \frac{\lambda_i}{\lambda} + K\lambda_i \frac{\lambda_j}{\lambda} \rho_{ij} g e_z. \quad (4.14)$$

Para a construção das soluções analíticas e para implementação numérica faz-se necessário adimensionalizar (4.13) e (4.14) para que as variáveis estejam compreendidas dentro de um certo intervalo.

4.2 Adimensionalização

O processo de adimensionalização da equação (4.13) e da função de fluxo (4.14), além de facilitar a análise da presença do termo dominante na função de fluxo, faz com que as variáveis fiquem "normalizadas" e seus valores passam a se situar entre certos limites prescritos [25]. No presente trabalho faz-se um processo de adimensionalização similar ao feito por Rodríguez-Bermúdez [1]. Denota-se por K_{ref} [m^2] como a permeabilidade absoluta de referência, v_{ref} [m/s] a velocidade de referência para o problema, ρ_{ref} [Kg/m^3] a densidade de referência, L [m] o comprimento de referência, μ_{ref} [$Kg\ m^{-1}s^{-1}$] a viscosidade de referência. As variáveis adimensionais são representadas abaixo com um "~".

$$\tilde{t} = \frac{tv_{ref}}{L\phi}, \quad \tilde{x} = \frac{x}{L}, \quad \tilde{v} = \frac{v}{v_{ref}}, \quad \tilde{K} = \frac{K}{K_{ref}}, \quad \tilde{d} = \frac{d}{v_{ref}L}, \quad \tilde{q} = \frac{q}{v_{ref}L}; \quad (4.15)$$

$$\tilde{\lambda}_i = \lambda_i\mu_{ref}, \quad \tilde{\rho}_i = \frac{\rho_i}{\rho_{ref}}, \quad \tilde{\mu}_i = \frac{\mu_i}{\mu_{ref}}, \quad \tilde{q}_i = \frac{q_i}{v_{ref}}, \quad \text{para } i = w, o. \quad (4.16)$$

Pode-se escolher as variáveis de referência de várias maneiras, porém como tem-se interesse aqui em não negligenciar o termo gravitacional, pode-se adotar $v_{ref} = \frac{K_{ref}\rho_{ref}g}{\mu_{ref}}$ [1]. E assim, ao substituir as variáveis adimensionais acima em (4.13) e (4.14) obtém-se a seguinte equação:

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{t}}(s_i) + \frac{\partial}{\partial \tilde{z}}(F_i(\tilde{z}, s_i)) = \tilde{q}_i\delta(\tilde{z}), \quad \text{para } i = w, o. \quad (4.17)$$

Com função de fluxo dada por:

$$F_i(\tilde{z}, s_i) = (\tilde{q}H(\tilde{z}) + \tilde{d})\frac{\tilde{\lambda}_i}{\tilde{\lambda}} + \tilde{K}\tilde{\lambda}_i\frac{\tilde{\lambda}_j}{\tilde{\lambda}}\tilde{\rho}_{ij}ge_z. \quad (4.18)$$

Pode-se a partir de agora omitir o "~" e trabalhar com a equação apenas na forma dimensional. A função de fluxo (4.18) não apresenta dependência explícita da saturação (veja, [1, 5, 8]) mas como a permeabilidade relativa é função, unicamente, da saturação, ou seja, $k_i = k_i(s_i)$ para $i = w, o$.

4.3 Permeabilidade Quadrática

Nesse trabalho, assim como em Rodríguez-Bermúdez [1] restringe-se a análise para o modelo com permeabilidade quadrática, pois com esta escolha consegue-se destacar os fenômenos de interesse e evitar ao mesmo tempo análises complicadas. Portanto, explicitamente, a mobilidade de cada fase depende somente da saturação da fase e é quadrática, *i.e.*,

$$\lambda_i(s_i) = \frac{s_i^2}{\mu_i}, \quad \text{para } i = w, o; \quad \lambda = \sum \frac{s_i^2}{\mu_i}, \quad \text{para } i = w, o. \quad (4.19)$$

Por fim, ao substituir (4.19) em (4.17) e (4.18) e considerar o fato de o meio ser totalmente saturado (e portanto uma das equações pode ser desconsiderada), consegue-se escrever o modelo como apenas uma equação da seguinte forma para a fase $i = w$:

$$\frac{\partial}{\partial t}(s_w) + \frac{\partial}{\partial z} F_w(z, s_w) = q_w \delta(z). \quad (4.20)$$

Com função de fluxo dada por:

$$F_w(z, s_w) = \frac{\frac{(qH(z) + d)(s_w)^2}{\mu_w} + \frac{(s_w)^2(1 - s_w)^2 \rho_{wo}}{\mu_w \mu_o}}{\frac{(s_w)^2}{\mu_w} + \frac{(1 - s_w)^2}{\mu_o}}, \quad (4.21)$$

Ressalta-se que com o auxílio da equação de estado $s_o = 1 - s_w$, é possível demonstrar que a equação para a fase w é a mesma que a para a fase o , portanto a partir daqui só será utilizada a equação para uma fase no caso $s = s_w$.

O numerador da função de fluxo (4.21) é composto por duas partes, onde uma delas é consequência da presença do termo gravitacional, e pode ser escrita como:

$$G(s_w) = \frac{(s_w)^2(1 - s_w)^2 \rho_{wo}}{\mu_w \mu_o}. \quad (4.22)$$

No presente trabalho, será considerado $G(s_w) \neq 0$, portanto o caso em que $\rho_{wo} = 0$ não será analisado, pois se estaria considerando os fluidos com mesma densidade e o escoamento nesse caso seria puramente convectivo, ver [1], em tal caso todas as ondas teriam velocidades positivas e a solução do problema de Riemann, mesmo com o termo fonte δ de Dirac seria trivial. A seguir são construídas as soluções de Riemann para o modelo proposto no presente capítulo, certas dificuldades aparecem devido a presença da função de Heaviside e do termo fonte singular.

Capítulo 5

Construção da Solução Analítica para o Problema de Riemann

No presente capítulo serão obtidas as soluções de Riemann para a (4.20), utilizando para isto uma extensão da construção geométrica de Oleinik, que nos permite construir os perfis esquemáticos das soluções mesmo com a presença da descontinuidade da função de fluxo em relação à variável espacial, obtendo assim, a solução em todo o domínio.

Em geral, como consequência de uma descontinuidade espacial em $z = 0$ na função de fluxo, todas as soluções de Riemann irão apresentar um choque estacionário. Kaasschieter em [8] obteve critérios de entropia para tais choques estacionários ao estudar um problema com fluxo descontínuo que modela o escoamento bifásico puramente gravitacional (ou seja, termos convectivos devido a gradientes de pressão são desconsiderados) e sem termo fonte. No trabalho de Kaasschieter a descontinuidade no fluxo era consequência da heterogeneidade da rocha. No presente trabalho, utiliza-se uma ideia similar as de Kaasschieter [8], para a obtenção de novos critérios de entropia para o problema proposto no capítulo 4 de injeção pontual em $z = 0$ em um escoamento bifásico com gravidade e termos convectivos por gradientes de pressão modelado pela lei de balanço (4.20) com função de fluxo descontínua dada por (4.21). Dado que não são apresentadas as provas desses critérios de entropia utilizados, enunciam-se tais resultados em forma de duas conjecturas.

5.1 A Função de Fluxo

A construção geométrica clássica de Oleinik para problemas de Riemann com funções de fluxo contínuas é feita através das construções das envoltória côncavas ou convexas

ou combinações destas, ou seja, as soluções são obtidas a partir da relação entre os dados iniciais e do gráfico da função de fluxo [7, 19]. No problema estudado no presente trabalho, a função de fluxo dada por (4.21), devido à presença da função de Heaviside ($H(z)$), apresenta uma descontinuidade em $z = 0$. Pode-se escrever tal função de fluxo da seguinte forma:

$$F(z, s_w) = \begin{cases} F_l(s_w), & z < 0, \\ F_r(s_w), & z > 0, \end{cases} \quad (5.1)$$

onde,

$$F_l(s_w) = \frac{\frac{[d]s_w^2}{\mu_w} + \frac{s_w^2(1-s_w)^2\rho_{wo}}{\mu_w\mu_o}}{\frac{(s_w)^2}{\mu_w} + \frac{(1-s_w)^2}{\mu_o}}, \quad (5.2)$$

$$F_r(s_w) = \frac{\frac{[q+d]s_w^2}{\mu_w} + \frac{s_w^2(1-s_w)^2\rho_{wo}}{\mu_w\mu_o}}{\frac{(s_w)^2}{\mu_w} + \frac{(1-s_w)^2}{\mu_o}}. \quad (5.3)$$

Graficamente tem-se a situação apresentada na Figura 5.1 com $F_r(s_w) > F_l(s_w)$ para todo $s_w \in (0, 1)$. Para facilitar a notação omite-se daqui para frente o subíndice w .

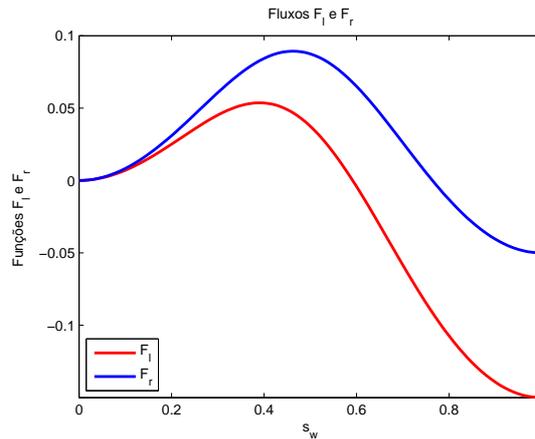


Figura 5.1: Fluxos F_l e F_r para o modelo proposto. O gráfico F versus s pode ser interpretado como se F fosse definida por duas sentenças, onde uma curva foi obtida para $z < 0$ e outra para $z > 0$. Para a construção do gráfico foram tomados os seguintes parâmetros: $\mu_w = \mu_o = 1$, $\rho_w = 1$, $\rho_o = 0.1$, $q = 0.1$ e $d = 0.15$.

Um passo importante para construção geométrica das soluções de Riemann para o modelo proposto é identificar a quantidade de pontos de inflexão em F_l e F_r no intervalo

$(0, 1)$. O método usual para determinar os pontos de inflexão de uma função corresponde a uma tarefa árdua para este caso, devido à complexidade das derivadas de tais funções. Contudo, evidências numéricas têm conduzido à presença de um ou dois pontos de inflexão em $(0, 1)$. Ao tomar $\mu = \mu_w = \mu_o$, por simplicidade e após alguns cálculos, pode-se perceber que para $|\rho_{wo}| > |\mu d|$ (ou seja, gravidade dominante), as curvas F_l e F_r apresentam dois pontos de inflexão, enquanto para $|\rho_{wo}| < |\mu d|$ (ou seja, convecção dominante), apenas um ponto cada. Apresenta-se, no presente trabalho, as soluções de Riemann apenas para o caso em que a gravidade é dominante. Este caso é mais interessante, pois devido à presença de dois pontos de inflexão as soluções apresentam um maior número de ondas.

A seguir é apresentada a extensão da construção geométrica clássica de Oleinik, que nos permite construir os perfis esquemáticos das soluções em todo o domínio.

5.2 Construção da Solução Analítica Baseado Na Extensão do Critério de Oleinik

O modelo em estudo é descrito por (4.20) com função de fluxo (4.21). Obviamente, buscam-se soluções fracas de (4.20), isto é equivalente a se considerar no sentido fraco que:

$$\begin{aligned} s_t + (F_l(s))_z &= q_w \delta(z), & z < 0, & t > 0, \\ s_t + (F_r(s))_z &= q_w \delta(z), & z > 0, & t > 0, \end{aligned}$$

e, para $z = 0$, s satisfaz a condição de Rankine-Hugoniot; ou seja, para quase todo t ,

$$F_l(S_l) = F_r(S_r), \tag{5.4}$$

onde, $S_l = \lim_{z \rightarrow 0^-} s(z, t)$ e $S_r = \lim_{z \rightarrow 0^+} s(z, t)$.

As soluções fracas podem não ser unicamente determinadas pela condição inicial, sendo necessário um critério adicional para se obter a solução fisicamente correta. É sabido que as restrições usuais para se obter unicidade (condição de Lax ou Oleinik) não se aplicam na presença de ondas estacionárias [12, 26]. Este fator motiva a busca por um novo critério de entropia que permita obter uma extensão geométrica da construção clássica de Oleinik.

Kaasschieter [8], ao estudar as soluções de Riemann para um escoamento bifásico com gravidade em um meio poroso heterogêneo, deparou-se com a presença de ondas estacionárias nas soluções. Tal fenômeno era consequência da descontinuidade na função

de fluxo, em relação à variável espacial, devido ao fato da porosidade ϕ não ser constante. Assim, [8] apresentou duas desigualdades de entropia, uma para quando a velocidade do choque $\sigma \neq 0$ e outra para $\sigma = 0$. Para a primeira condição, Kaasschieter verificou que todos os saltos satisfaziam a condição de entropia de Oleinik, portanto para $z < 0$ e $z > 0$ os perfis das soluções foram obtidos através da construção geométrica de Oleinik.

Apesar de no presente trabalho se estar considerando um meio poroso homogêneo, a presença do termo fonte do tipo δ de Dirac produz uma descontinuidade na função de fluxo. Assim, é de se esperar uma semelhança na estrutura das soluções com as do problema apresentado por [8], isto é, na composição das sequências de ondas.

Para o modelo proposto os perfis das soluções de Riemann para $z < 0$ e $z > 0$ também podem ser obtidas através da construção geométrica de Oleinik. Entretanto, para o caso em que $z = 0$ tem-se a presença de uma onda de choque estacionária ($\sigma = 0$), como a construção geométrica clássica de Oleinik não se aplica nesse caso, apresentam-se duas conjecturas que foram escritas com base nos teoremas presentes em [8] e que permitem estender a construção geométrica de Oleinik para o modelo estudado no presente trabalho.

Dividem-se as construções das soluções de Riemann em dois casos. O primeiro deles $\rho_{wo} > 0$ que tem como particularidade F_l e F_r apresentarem um ponto de máximo cada. Para o segundo caso, $\rho_{wo} < 0$ e F_l e F_r apresentam um mínimo cada. Para ambos os casos $F_r(s) > F_l(s)$ para todo $s \in (0, 1)$. Do ponto de vista físico do problema, $\rho_{wo} > 0$ representa que a água é mais densa que o óleo, enquanto para $\rho_{wo} < 0$ o óleo é mais denso que a água. Assim devido aos efeitos gravitacionais e das diferentes proporções de saturações iniciais destes fluidos existem uma grande variedade de soluções a serem construídas.

- **Caso 1: $\rho_{wo} > 0$ (Caso em que a água é mais densa que o óleo)**

Para este primeiro caso apresenta-se uma conjectura que permite estender a construção geométrica de Oleinik. Para uma melhor compreensão de tal conjectura definem-se estados relevantes como segue.

- M_l é tal que F_l é crescente em $[0, M_l]$ e decrescente em $[M_l, 1]$;
- s_l^0 é o estado inicial à esquerda;
- s_r^0 é o estado inicial à direita;
- s_r^- é tal que $F_r(s_r^-) = F_l(M_l)$, quando $s_r^- \in [0, M_r]$;

- s_r^+ é tal que $F_r(s_r^+) = F_l(M_l)$, quando $s_r^+ \in [M_r, 1]$;
- s_r^* é tal que $F_r(s_r^*) = F_l(s_l^0)$, quando $F_r'(s_r^*) > 0$;
- s_r^{**} é tal que $F_r(s_r^{**}) = F_l(s_l^0)$, quando $F_r'(s_r^{**}) < 0$;
- s_l^* é tal que $F_l(s_l^*) = F_r(s_r^0)$, quando $F_l'(s_l^*) > 0$;
- s_l^{**} é tal que $F_l(s_l^{**}) = F_r(s_r^0)$, quando $F_l'(s_l^{**}) < 0$.
- s_1 é tal que $\frac{F_l(s_1) - F_l(s_l)}{s_1 - s_l} = F_l'(s_1)$.

Além destes estados importantes, utiliza-se uma notação similar a presente em [10] a fim de descrever as soluções de Riemann. Assim, denota-se por $s_l \xrightarrow{\text{wave}} s_r$ para expressar o fato de que o estado s_l é conectado ao estado s_r (na direita) por uma onda elementar do tipo *wave*. Os tipos de ondas elementares são denotadas como segue.

Nomenclatura para as ondas elementares

- R , se a onda é uma rarefação;
- SH , se a onda é um choque com velocidade não nula ($\sigma \neq 0$);
- SC , se a onda é um choque cuja velocidade é característica à direita, isto é $\sigma = F'(s_r)$;
- CS , se a onda é um choque cuja velocidade é característica à esquerda, isto é $\sigma = F'(s_l)$;
- SE , se a onda é um choque estático ($\sigma = 0$);
- CSE , se a onda é um choque estático ($\sigma = 0$) cuja velocidade é característica à esquerda;
- SCE , se a onda é um choque estático ($\sigma = 0$) cuja velocidade é característica à direita.

Onde:

- **Ondas de Choque (SH)** são da forma;

$$SH = \begin{cases} s_l, & z < \sigma t, \\ s_r, & z > \sigma t. \end{cases} \quad (5.5)$$

- **Onda de Rarefação (R)** são da forma;

$$R(\eta) = \begin{cases} s_l, & z \leq \eta t, \\ (F')^{-1}(\eta), & \eta t < z < \eta_r t, \\ s_r, & z \geq \eta_r t. \end{cases} \quad (5.6)$$

Com $\eta = \frac{z}{t}$, $\eta_l := F'(s_l)$, $\eta_r := F'(s_r)$ e $\sigma = \frac{F(s_r) - F(s_l)}{s_r - s_l}$. As soluções para $z < 0$ e $z > 0$ podem ser obtidas através das construções das envoltórias côncava e convexa (construção clássica de Oleinik). Para $z = 0$ tem-se a presença de uma onda de choque estática, assim as soluções podem ser escritas da seguinte forma:

$$s_l^0 \xrightarrow{G.O.E.1} S_l \xrightarrow{SE} S_r \xrightarrow{G.O.E.2} s_r^0.$$

Onde *G.O.E.1* e *G.O.E.2* representam dois grupos formados pelas seqüências de ondas elementares, o primeiro deles é composto por ondas com velocidades negativas e o segundo grupo ondas com velocidades positivas. O critério de entropia para determinar as soluções fisicamente corretas e em particular para determinar os estados S_l e S_r que estão conectados pelo choque estacionário, pode ser enunciado através da seguinte conjectura.

Conjectura 5.2.1 (Critério de Entropia) *Seja F_l crescente em $[0, M_l]$ e decrescente em $[M_l, 1]$. Assume-se que $F_r(s) > F_l(s)$ para todo $s \in (0, 1)$. Seja $s_r^- \in [0, M_r]$ tal que $F_r(s_r^-) = F_l(M_l)$ (cuja existência está garantida pelo fato de que $F_l(0) = F_r(0) = 0$, $F_r(s_r) > F_l(s_l)$ para todo $s \in (0, 1)$ e pela continuidade de F_l e F_r). Seja $s_r^+ \in (M_r, 1]$ tal que $F_r(s_r^+) = F_l(M_l)$ (s_r^+ não necessariamente existe). Então, tem-se como soluções entrópicas de Riemann as seguintes seqüências de ondas:*

- (a) se $M_l \leq s_l^0 \leq 1$ e $0 \leq s_r^0 < s_r^+$, então

$$s_l^0 \xrightarrow{G.O.E.1} M_l = S_l \xrightarrow{CSE} S_r = s_r^- \xrightarrow{G.O.E.2} s_r^0;$$

- (b) se $M_l \leq s_l^0 \leq 1$ e $s_r^+ \leq s_r^0 \leq 1$, então

$$s_l^0 \xrightarrow{G.O.E.1} s_l^{**} = S_l \xrightarrow{SE} S_r = s_r^0;$$

- (c) se $0 \leq s_l^0 < M_l$ e $0 \leq s_r^0 < s_r^{**}$, então

$$s_l^0 = S_l \xrightarrow{SE} S_r = s_r^* \xrightarrow{G.O.E.2} s_r^0;$$

(d) se $0 \leq s_l^0 < M_l$ e $s_r^{**} < s_r^0 \leq 1$, então

$$s_l^0 \xrightarrow{G.O.E.1} s_l^{**} = S_l \xrightarrow{SE} S_r = s_r^0.$$

Nota-se através da conjectura (5.2.1) que para o caso (a) existem dois grupos de ondas elementares, o primeiro viajando com velocidade negativa para a esquerda (parte superior do reservatório) e outro com velocidade positiva para a direita (parte inferior do reservatório). Para os casos (b) e (d) têm-se apenas um grupo viajando com velocidade negativa para a esquerda (parte superior do reservatório), enquanto em (c) tem-se somente um grupo que viaja com velocidade positiva (parte inferior do reservatório).

Com o auxílio da construção geométrica de Oleinik para $z < 0$ e $z > 0$ e da conjectura (5.2.1), para conectar S_l a S_r , pode-se obter as soluções de Riemann para o modelo proposto. Dependendo dos dados de Riemann s_l^0 e s_r^0 e da sua localização em relação aos pontos de inflexão nas funções de fluxo F_l e F_r vários subcasos podem acontecer. Em forma de exemplo expõem-se as seguintes soluções de Riemann para alguns desses subcasos:

(a) se $M_l \leq s_l^0 \leq 1$ e $0 \leq s_r^0 < s_r^+$, uma sequência de ondas possível é;

$$s_l^0 \xrightarrow{SC} s_1 \xrightarrow{R} M_l = S_l \xrightarrow{CSE} S_r = s_r^- \xrightarrow{SH} s_r^0;$$

veja Figura 5.2(a) e Figura 5.3(a)

(b) se $M_l \leq s_l^0 \leq 1$ e $s_r^+ \leq s_r^0 \leq 1$, uma sequência de ondas possível é;

$$s_l^0 \xrightarrow{SH} S_l = s_l^{**} \xrightarrow{SE} S_r = s_r^0;$$

veja Figura 5.2(b) e Figura 5.3(b)

(c) se $0 \leq s_l^0 < M_l$ e $0 \leq s_r^0 < s_r^{**}$, uma sequência de ondas possível é;

$$s_l^0 = S_l \xrightarrow{SE} S_r = s_r^* \xrightarrow{SH} s_r^0;$$

veja Figura 5.2(c) e Figura 5.3(c)

(d) se $0 \leq s_l^0 < M_l$ e $s_r^{**} < s_r^0 \leq 1$, uma sequência de ondas possível é;

$$s_l^0 \xrightarrow{SH} s_l^{**} = S_l \xrightarrow{SE} S_r = s_r^0.$$

veja Figura 5.2(d) e Figura 5.3(d)

Na Figura 5.3 expõem-se os respectivos perfis esquemáticos das soluções (figuras feitas à mão, onde ondas de rarefação foram representadas por retas).

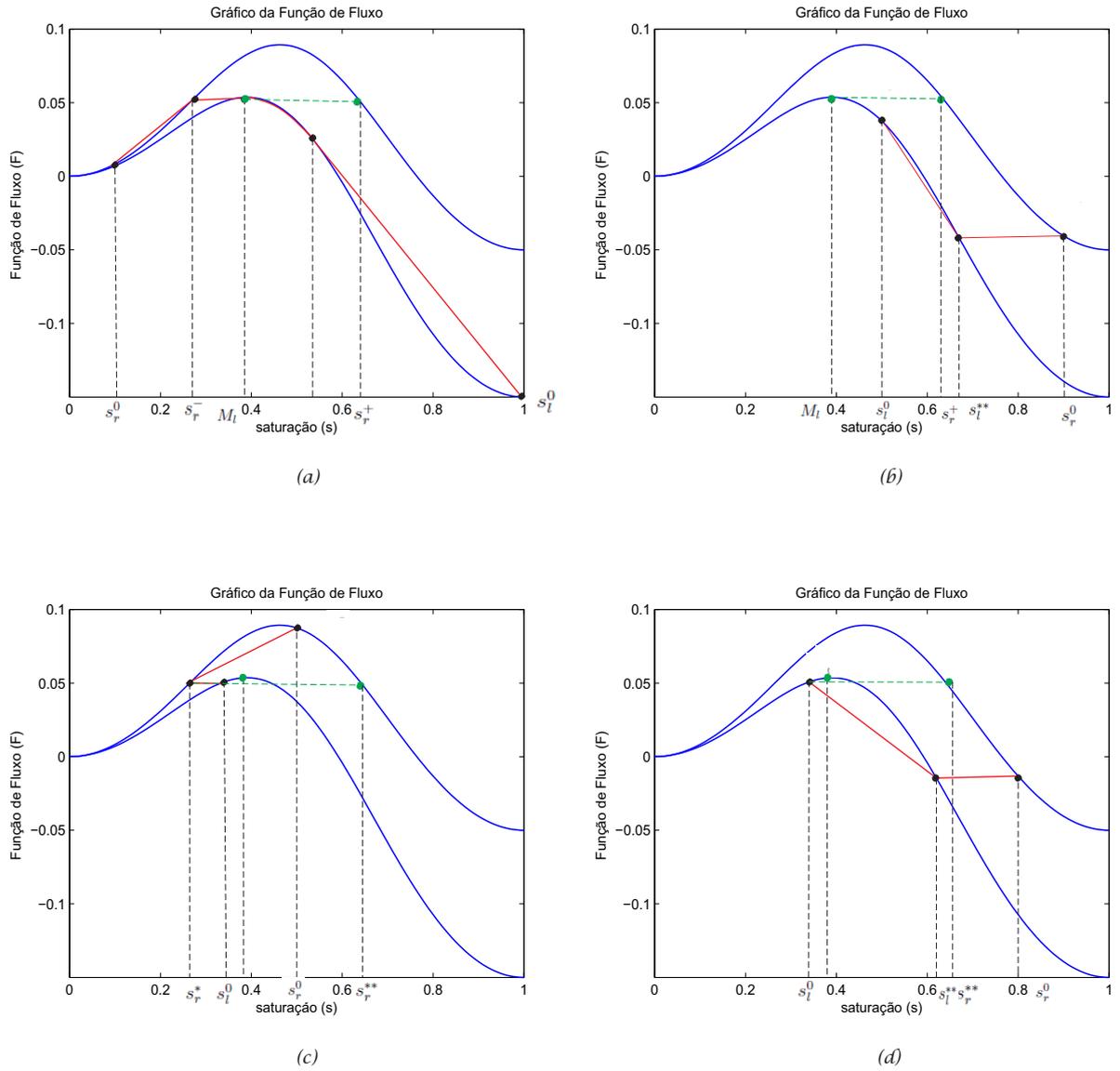
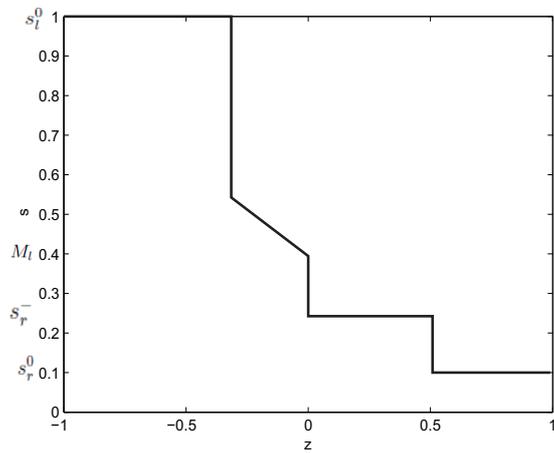
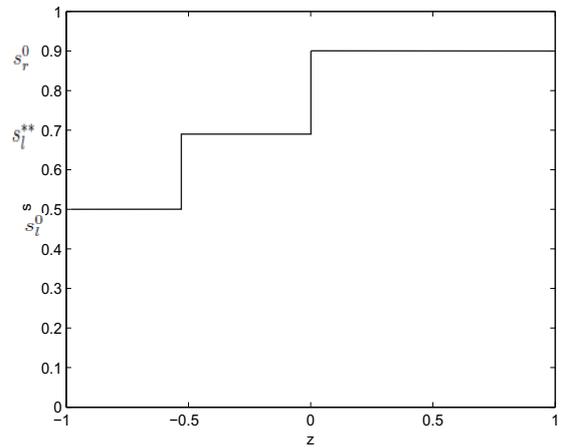


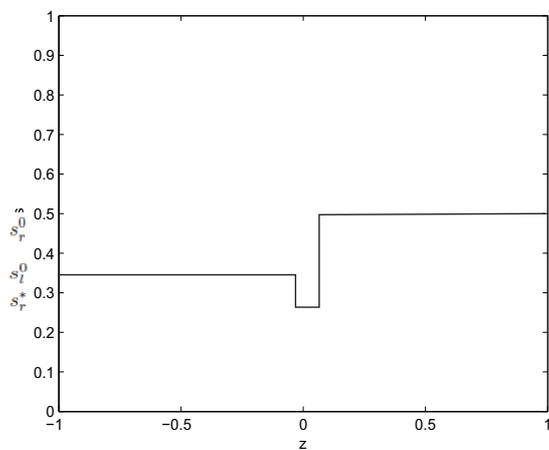
Figura 5.2: Construção geométrica das soluções de Riemann. Os dados iniciais são dados por: (a) $s_l^0 = 1$ e $s_r^0 = 0.1$; (b) $s_l^0 = 0.5$ e $s_r^0 = 0.9$; (c) $s_l^0 = 0.35$ e $s_r^0 = 0.5$; (d) $s_l^0 = 0.35$ e $s_r^0 = 0.8$, para todos os casos foram utilizados os seguintes parâmetros: $\mu_w = \mu_o = 1$, $\rho_w = 1$, $\rho_o = 0.1$, $d = -0.15$, $q = 0.1$, $q_w = 0.01$.



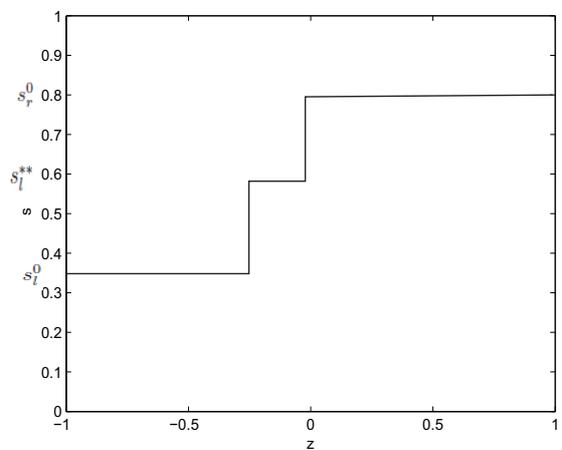
(a)



(b)



(c)



(d)

Figura 5.3: Perfil esquemático ilustrativo (construído à mão) das respectivas construções apresentadas na Figura 5.2 para um tempo fixo $t = 1$. As ondas de rarefações são representadas por retas inclinadas em relação aos eixos.

• **Caso 2: $\rho_{wo} < 0$ (Caso em que o óleo é mais densa que a água)**

Para este segundo caso, tem-se uma situação em que o óleo é mais denso que a água. Realiza-se um procedimento análogo ao do anterior ($\rho_{wo} > 0$) para a construção geométrica das soluções. Para isto definem-se os seguintes estados importantes para a apresentação da conjectura:

- M_r é tal que F_r é decrescente em $[0, M_r]$ e crescente em $[M_r, 1]$;
- s_l^0 é o estado inicial à esquerda;
- s_r^0 é o estado inicial à direita;
- s_l^- é tal que $F_l(s_l^-) = F_r(M_r)$, quando $s_l^- \in [0, M_l]$;
- s_l^+ é tal que $F_l(s_l^+) = F_r(M_r)$, quando $s_l^+ \in [M_l, 1]$;
- s_r^* é tal que $F_r(s_r^*) = F_l(s_l^0)$, quando $F_r'(s_r^*) > 0$;
- s_r^{**} é tal que $F_r(s_r^{**}) = F_l(s_l^0)$, quando $F_r'(s_r^{**}) < 0$;
- s_l^* é tal que $F_l(s_l^*) = F_r(s_r^0)$, quando $F_l'(s_l^*) > 0$;
- s_l^{**} é tal que $F_l(s_l^{**}) = F_r(s_r^0)$, quando $F_l'(s_l^{**}) < 0$.
- s_2 é tal que $\frac{F_r(s_r) - F_r(s_1)}{s_r - s_2} = F_r'(s_2)$.

Ao utilizar a mesma nomenclatura das ondas elementares do caso 1 em que $\rho_{wo} > 0$ e considerar o fato de que as soluções também apresentam a estrutura dada por:

$$s_l^0 \xrightarrow{G.O.E.1} S_l \xrightarrow{SE} S_r \xrightarrow{G.O.E.2} s_r^0.$$

Então o choque entrópico entre os estados $S_l = \lim_{z \rightarrow 0^-} s(z, t)$ e $S_r = \lim_{z \rightarrow 0^+} s(z, t)$ pode ser determinado através da seguinte conjectura:

Conjectura 5.2.2 (Critério de Entropia) *Seja F_r decrescente em $[0, M_r]$ e crescente em $[M_r, 1]$. Assume-se que $F_r(s) > F_l(s)$ para todo $s \in (0, 1)$. Seja $s_l^- \in [0, M_l]$ tal que $F_l(s_l^-) = F_r(M_r)$ (cuja existência é garantida pelo fato de que $F_r(0) = F_l(0)$ e $F_r(s_r) > F_l(s_l)$ para todo $s \in (0, 1)$ e da continuidade de $F_l(s)$ e $F_r(s)$). Seja $s_l^+ \in (M_l, 1]$ tal que $F_l(s_l^+) = F_r(M_r)$ (s_l^+ não necessariamente existe). Então, tem-se como soluções as seguintes seqüências de ondas:*

(a) se $M_r \leq s_r^0 \leq 1$ e $0 \leq s_l^0 < s_l^+$, então

$$s_l^0 \xrightarrow{G.O.E.1} s_l^- = S_l \xrightarrow{SCE} S_r = M_r \xrightarrow{G.O.E.2} s_r^0;$$

(b) se $M_r \leq s_r^0 \leq 1$ e $s_l^+ \leq s_l^0 \leq 1$, então

$$s_l^0 = S_l \xrightarrow{SE} S_r = s_r^* \xrightarrow{G.O.E.2} s_r^0;$$

(c) se $0 \leq s_r^0 < M_r$ e $0 \leq s_l^0 < s_l^*$, então

$$s_l^0 \xrightarrow{G.O.E.1} s_l^{**} = S_l \xrightarrow{SE} S_r = s_r^0;$$

(d) se $0 \leq s_r^0 < M_r$ e $s_l^* < s_l^0 \leq 1$, então

$$s_l^0 = S_l \xrightarrow{SE} S_r = s_l^{**} \xrightarrow{G.O.E.2} s_r^0.$$

Através da conjectura 5.2.2 nota-se que as soluções podem ser compostas de dois grupos de ondas elementares separados pela onda estacionária, que é o que de fato ocorre para o caso (s). Já em (b) e (d) têm-se apenas um grupo com velocidade positiva viajando para a direita e em (c) um grupo com velocidade negativa viajando para a esquerda.

Com o auxílio da construção geométrica de Oleinik e da conjectura 5.2.2 pode-se obter as soluções de Riemann para o caso em estudo ($\rho_{wo} < 0$). Em forma de exemplo expõem-se as seguintes soluções de Riemann:

(a) se $M_r \leq s_r^0 \leq 1$ e $0 \leq s_l^0 < s_l^+$, uma sequência de ondas possível é;

$$s_l^0 \xrightarrow{SH} s_l^- = S_l \xrightarrow{SCE} S_r = M_r \xrightarrow{R} s_1 \xrightarrow{SH} s_r^0;$$

veja Figura 5.4(a) e Figura 5.5(a)

(b) se $M_r \leq s_r^0 \leq 1$ e $s_l^+ \leq s_l^0 \leq 1$, uma sequência de ondas possível é;

$$s_l^0 = S_l \xrightarrow{SE} S_r = s_r^* \xrightarrow{SH} s_r^0;$$

veja Figura 5.4(b) e Figura 5.5(b)

(c) se $0 \leq s_r^0 < M_r$ e $0 \leq s_l^0 < s_l^*$, uma sequência de ondas possível é;

$$s_l^0 \xrightarrow{SH} s_l^{**} = S_l \xrightarrow{SE} S_r = s_r^0;$$

veja Figura 5.4(c) e Figura 5.5(c)

(d) se $0 \leq s_r^0 < M_r$ e $s_l^* < s_l^0 \leq 1$, uma sequência de ondas possível é;

$$s_l^0 = S_l \xrightarrow{SE} S_r = s_l^{**} \xrightarrow{SH} s_r^0.$$

veja Figura 5.4(d) e Figura 5.5(d)

Na Figura 5.5 expõem-se os respectivos perfis esquemáticos das soluções (figuras feitas à mão, onde ondas de rarefação foram representadas por retas).

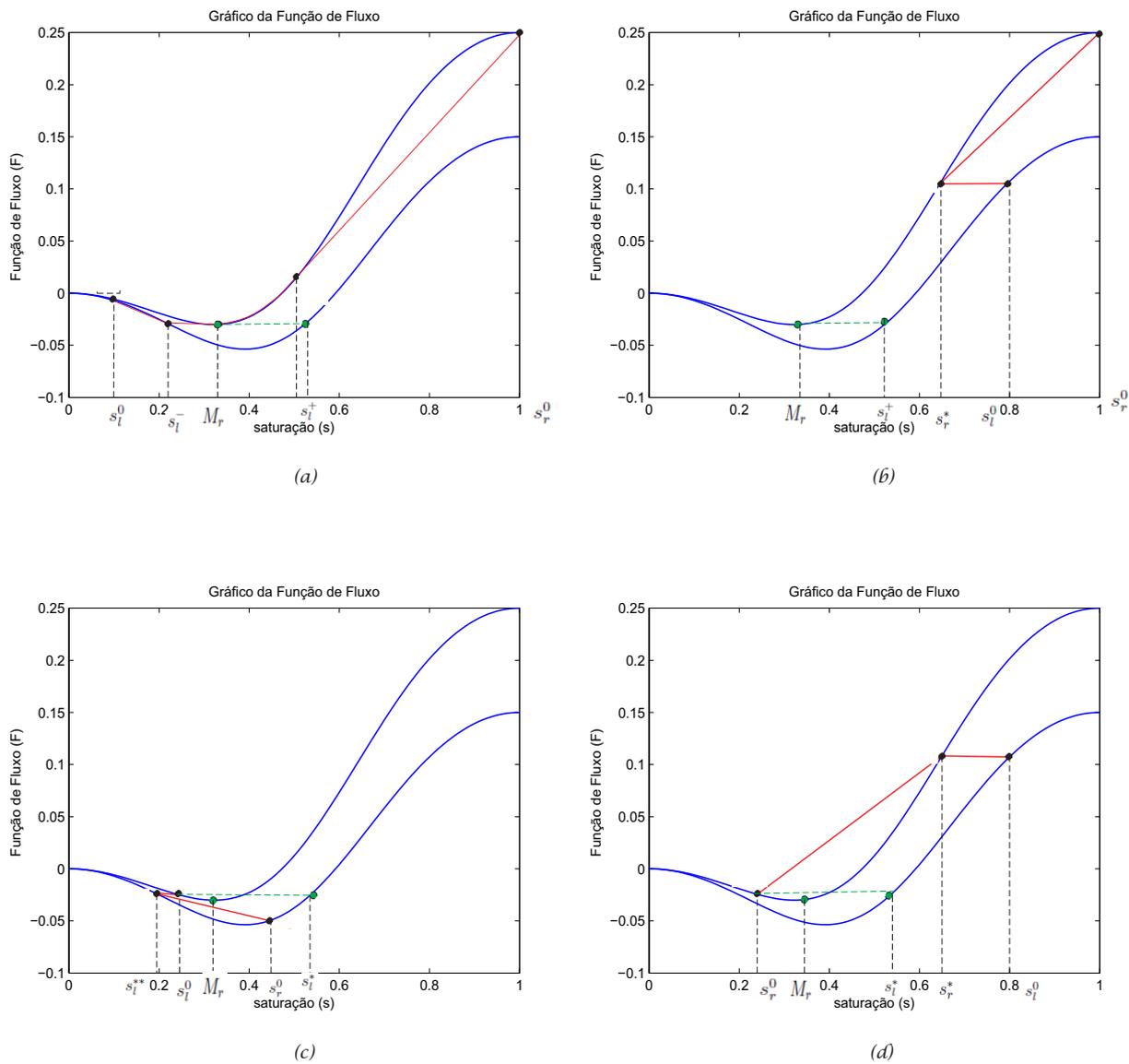


Figura 5.4: Construção geométrica das soluções de Riemann. Os dados iniciais são dados por: (a) $s_l^0 = 0.1$ e $s_r^0 = 1$; (b) $s_l^0 = 0.8$ e $s_r^0 = 1$; (c) $s_l^0 = 0.45$ e $s_r^0 = 0.25$; (d) $s_l^0 = 0.8$ e $s_r^0 = 0.25$, para todos os casos foram utilizados os seguintes parâmetros: $\mu_w = \mu_o = 1$, $\rho_w = 0.1$, $\rho_o = 1$, $d = 0.15$, $q = 0.1$, $q_w = 0.01$.

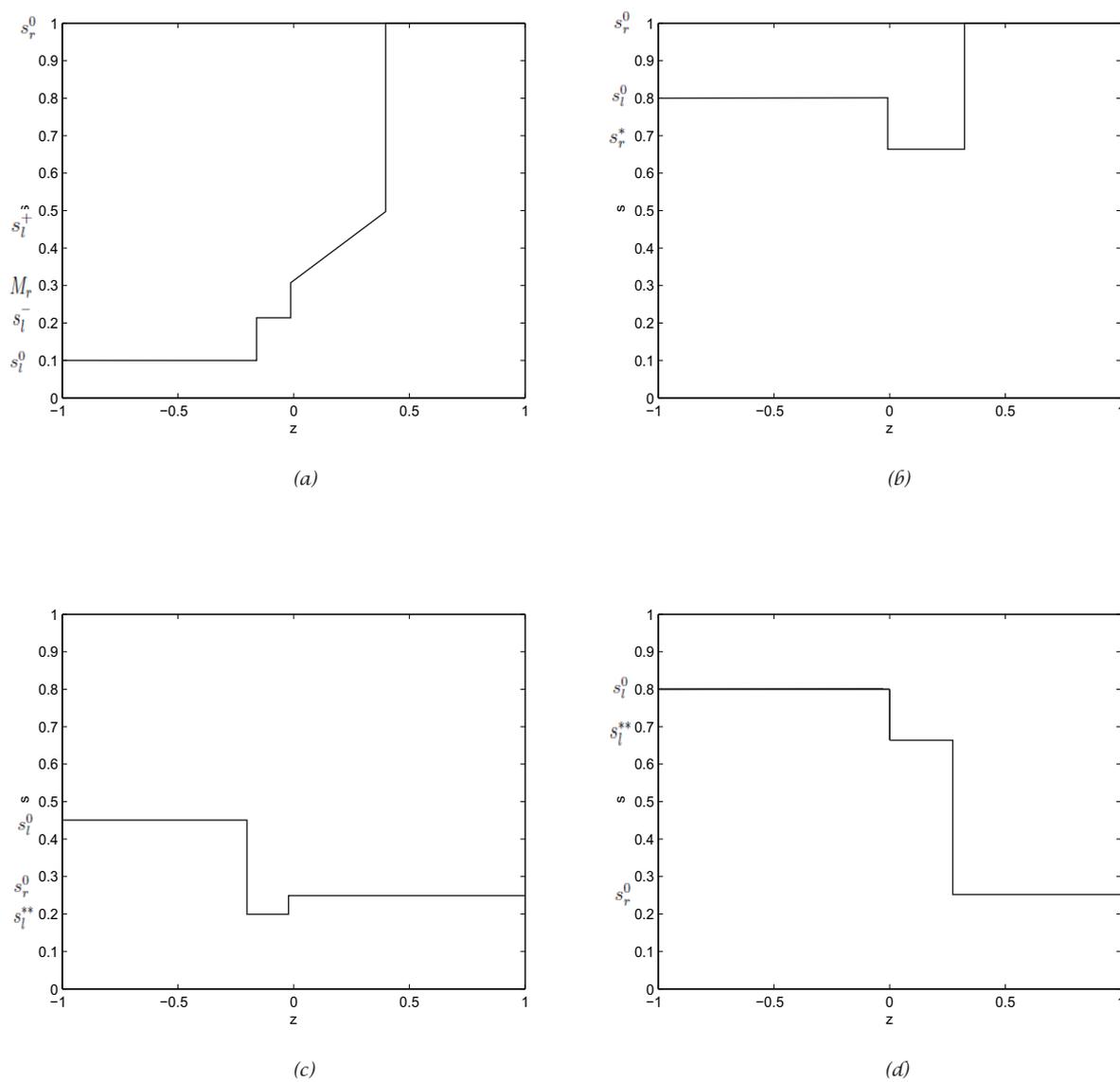


Figura 5.5: Perfil esquemático das respectivas construções apresentadas na Figura 5.4 para um tempo fixo $t = 1$.

Um fato a ser posicionado é que em um primeiro momento não se havia utilizado as conjecturas apresentadas para construção das soluções, e sim uma noção puramente intuitiva, pois tanto para $z > 0$ como para $z < 0$, o problema se reduzia a construção geométrica clássica de Oleinik, pois F_l e F_r são contínuas. Nestas regiões as soluções eram formadas de combinações de ondas de choques e rarefações [12]. Heuristicamente, era sabido que em $z = 0$, poderia haver uma onda estacionária, que satisfizesse a condição de Rankine-Hugoniot, como definida em (5.4). Assim, graficamente se fazia a passagem de um fluxo F_l para F_r ou vice-versa, através de um ponto de máximo (M_l) ou mínimo (M_r). Esta escolha inicial era insuficiente para resolver o problema de Riemann, pois existia uma variedade de dados iniciais em que não era possível obter a solução por haver uma incompatibilidade de velocidades. Um exemplo desta construção e da incompatibilidade pode ser visto na Figura 5.6.

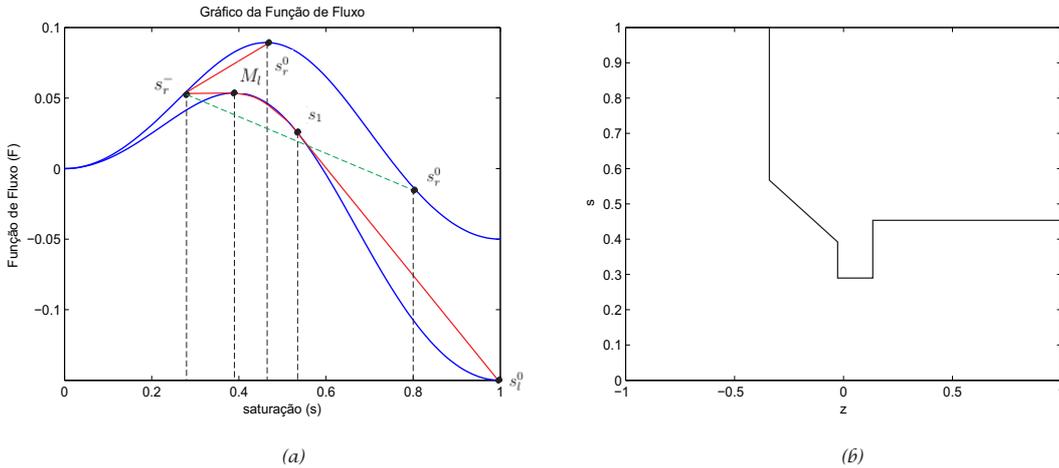


Figura 5.6: (a) Construção intuitiva do perfil esquemático da solução baseada na extensão do critério de Oleinik. Para condições iniciais $s_l = 1$ e $s_r = 0,45$ a sequência de ondas é entrópica, porém para o caso em que $s_l^0 = 1$ e $s_r^0 = 0,8$ tal construção seria impossível. (b) Perfil da solução para um determinado tempo $t = 1$, com dados iniciais $s_l = 1$ e $s_r = 0,45$.

Para o caso em que $s_l = 1$ e $s_r = 0,45$ construía-se a solução por um processo análogo à hipótese (a) da conjectura (5.2). Porém, para o caso em $s_l = 0,8$ tal construção conduziria a uma incompatibilidade de velocidades das ondas, pois após um choque estacionário ($\sigma = 0$), haveria um choque com velocidade negativa ($\sigma < 0$), o que contradiz a construção geométrica de Oleinik que parte de s_l^0 para s_r^0 em um sentido crescente de velocidades.

A seguir são expostas as soluções numéricas obtidas com o auxílio do método *LEB2* e com o algoritmo presente na Figura 3.3. Tais soluções numéricas são comparadas com os perfis das soluções obtidos pela extensão da construção clássica de Oleinik.

Capítulo 6

Resultados Numéricos

Neste capítulo serão apresentados os resultados numéricos obtidos pelo esquema de diferenças finitas obtido a partir da abordagem Lagrangeana -Euleriana descrito no capítulo 3 quando utilizado para resolver o problema de Riemann para a equação (4.20) com fluxo (4.21). Na implementação computacional do método numérico, acrescenta-se uma regularização conveniente do termo fonte singular com base em [15]. Isto implica em uma aproximação contínua da distribuição δ de Dirac em relação à malha computacional.

Na segunda parte do capítulo os resultados numéricos são expostos e se estabelece uma validação dos mesmos comparando-os, qualitativamente, com os perfis das soluções entrópicas obtidas pelo método da construção geométrica apresentado no capítulo 5. Uma observação importante é que as soluções numéricas obtidas pelo método *LEB2* servem como "evidências numéricas" de que as conjecturas 5.2.1 e 5.2.2 utilizadas na construção geométrica da solução são verdadeiras.

6.1 Regularização do Termo Fonte $\delta(z)$

Segundo [26, 27] a regularização numérica de termos singulares é uma técnica importante em muitos processos computacionais e tem sido utilizada em uma variedade de aplicações. Para o nosso problema, torna-se importante substituir a distribuição δ de Dirac por uma função contínua salvo discretização e avaliação na malha. Apresentam-se duas funções regularizadoras de δ , uma linear e uma outra função tipo cosseno, as quais satisfazem determinadas condições de momento [26, 27].

Definição 6.1.1 *Diz-se que uma função $\delta_\varepsilon(z)$ satisfaz a condição de momento de ordem P (ou que $\delta_\varepsilon(z) \in \Gamma^P$), se δ_ε tem um suporte compacto em $[-\varepsilon, \varepsilon]$, $\varepsilon = Nh$, $h = \Delta z$,*

$N > 0$ e

$$M_b(\delta_\varepsilon, \bar{z}, h) = h \sum_{j=-\infty}^{\infty} [\delta_\varepsilon(z_j - \bar{z})](z_j - \bar{z})^b = \begin{cases} 1, & b = 0, \\ 0, & 1 \leq b < p, \end{cases} \quad (6.1)$$

para algum $\bar{z} \in \mathbb{R}$, onde $z_j = jh$, $h > 0$, $j \in \mathbb{Z}$.

A primeira condição de momento, para $b = 0$, garante que a "massa" de delta seja identicamente 1, independente de mudanças na malha. Segundo [15], a precisão numérica é determinada pela ordem do momento da aproximação da função delta. Em termos práticos podemos definir as seguintes aproximações para o delta:

$$\delta_\varepsilon(z) = \begin{cases} \frac{1}{\varepsilon} \varphi\left(\frac{z}{\varepsilon}\right), & |z| \leq \varepsilon = Nh, \\ 0, & |z| > \varepsilon = Nh, \end{cases} \quad (6.2)$$

onde, $\delta_\varepsilon \in C(\mathbb{R})$, isto é, $\varphi(-1) = \varphi(1) = 0$. Com esta notação, temos uma função de regularização δ_ε^L linear se tomamos;

$$\varphi^L(\xi) = 1 - |\xi|, \quad (6.3)$$

e uma função de regularização do tipo cosseno $\delta_\varepsilon^{\cos}$ dada por;

$$\varphi^{\cos}(\xi) = \frac{1}{2}(1 + \cos(\pi\xi)). \quad (6.4)$$

Para ambas as aproximações, a condição de "massa" (ou seja, condição de momento para $b = 0$) é cumprida por $N \geq 1$ com inteiro $\varepsilon = Nh$ para a função linear, e por $\varepsilon = (N + 1)/2h$ para a função cosseno. A condição de momento para $b = 1$ não é satisfeita para a aproximação com função do tipo cosseno, portanto a mesma é de ordem 1. Já a função linear pode-se verificar que tem momento de ordem 2 [26].

6.2 Resultados Numéricos e Discussões

Nesta seção apresentam-se as soluções numéricas do problemas de Riemann para a equação (4.20) com função de fluxo dado por (4.21) obtidas pelo método de diferenças finitas LEB2 apresentado no capítulo 3 e com a regularização linear descrita acima. Faz-se uma comparação em termos qualitativos entre as soluções obtidas pelo esquema Lagrangeano-Euleriano (*LEB2*) e aquelas obtidas pelo método de construção geométrica exposto no capítulo 5. Dividem-se as soluções em dois casos, um em que $\rho_{wo} > 0$ e outro $\rho_{wo} < 0$.

- **Caso 1: $\rho_{wo} > 0$ (Caso em que a água é mais densa que o óleo)**

Para este primeiro caso tem-se que a água é mais densa que o óleo, é possível a obtenção de uma variedade de soluções a partir da evolução no tempo das diferentes proporções de saturações iniciais destes fluidos. Nas Figuras 6.1-6.4 são apresentadas do lado esquerdo as soluções numéricas obtidas com o auxílio do método *LEB2* e da regularização (6.3). Do lado direito das mesmas são expostos os respectivos perfis aproximados das soluções obtidas pelo método analítico da extensão da construção geométrica de Oleinik com a conjectura 5.2.1. Expõem-se nas 6.1-6.4 uma maior quantidade de exemplos que no capítulo 5. Especificamente, para cada caso (a), (b), (c),(d) da conjectura 5.2.1 mostram-se dois subcasos.

Na Figura 6.1, tem-se dois exemplos de soluções (i) e (ii), que apresentam como diferença o estado inicial à esquerda s_l^0 , tal fato caracteriza a presença de uma onda de choque com velocidade negativa a mais em (i) que em (ii). Fisicamente, percebe-se que devido aos fenômenos convectivos e pelo fato de se estar considerando a água mais densa que o óleo, a mesma tende com o passar do tempo a se depositar na parte inferior do reservatório. Nas Figuras 6.2-6.4, as soluções apresentam apenas grupos de ondas viajando para uma das partes, superior ou inferior, do reservatório.

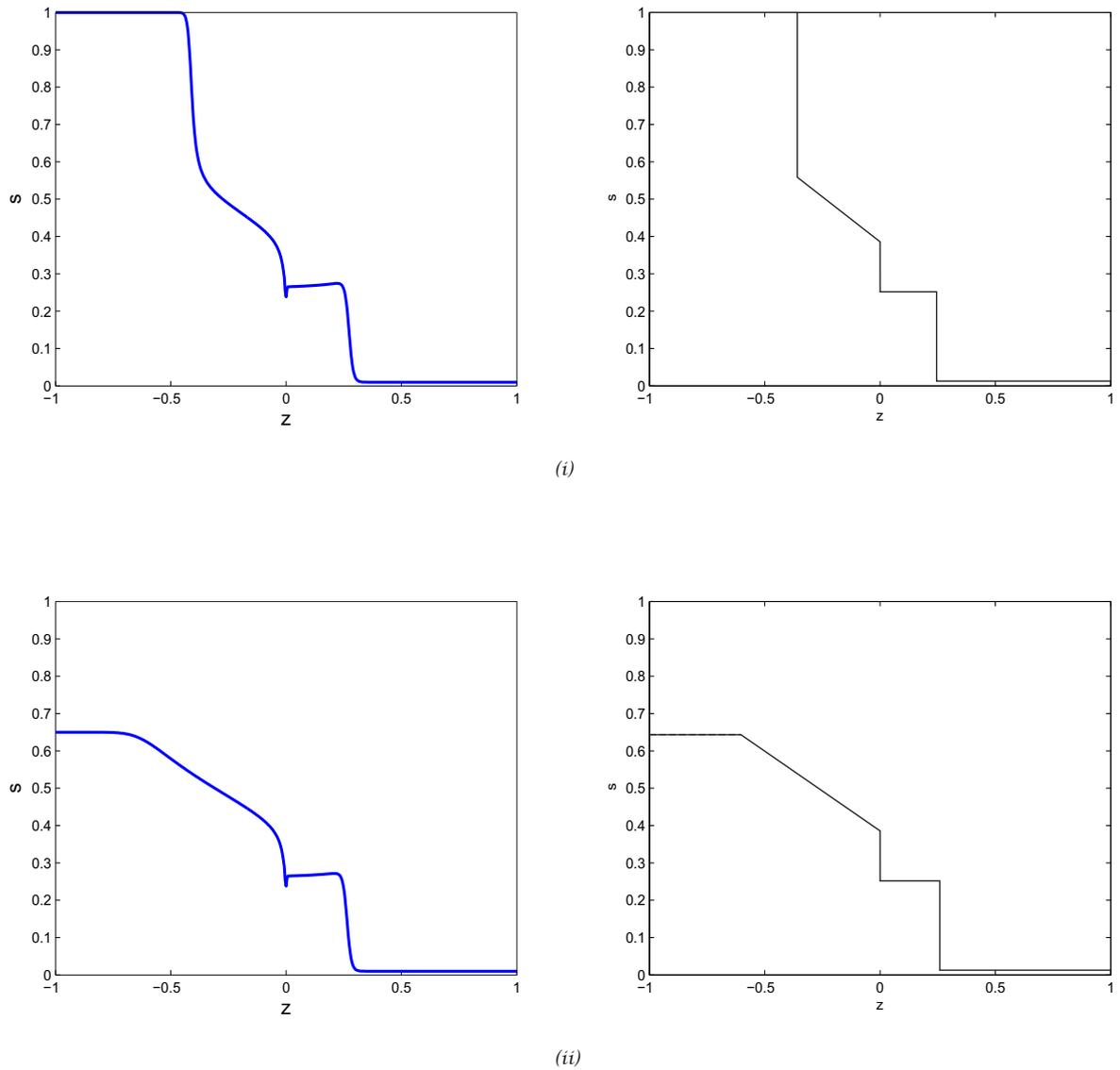


Figura 6.1: Comparação qualitativa entre as soluções numéricas e os perfis esquemáticos obtidos pela extensão da construção geométrica. Para os casos (i), (ii) têm-se: 513 nodos, $t = 1$, $CFL = 0.8$. Os parâmetros são: $\mu_w = \mu_o = 1$, $\rho_w = 1$, $\rho_o = 0.1$, $d = -0.15$, $q = 0.2$ e $q_w = 0.01$. Os dados iniciais para (i) foram $s_l^0 = 1$ e $s_r^0 = 0.01$, enquanto para (ii), $s_l^0 = 0.65$ e $s_r^0 = 0.01$. Os dados iniciais de Riemann tanto para (i) como para (ii) correspondem ao caso (a) da conjectura 5.2.1. $M_l = 0.39$ e $s_r^+ = 0.62$

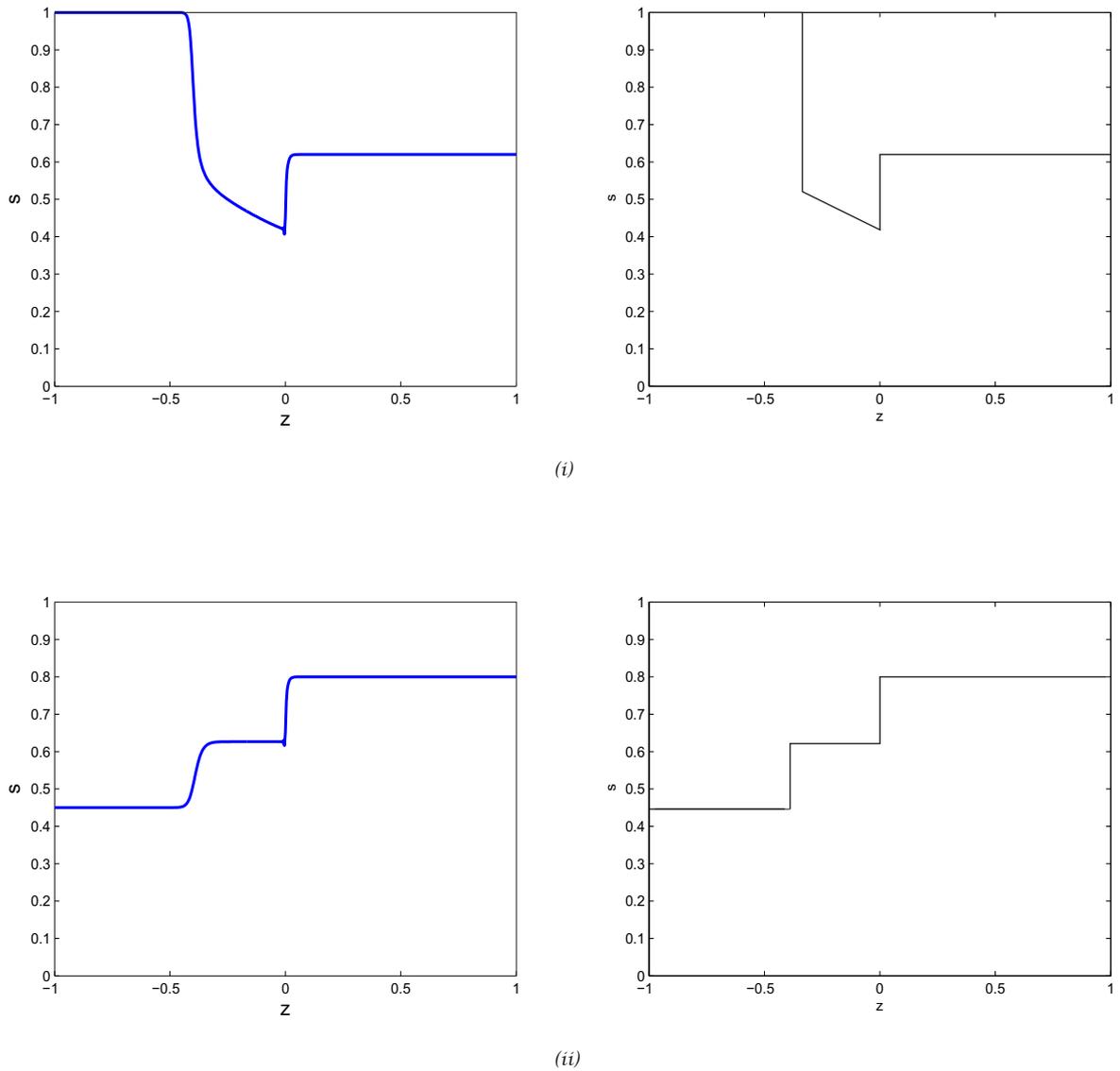


Figura 6.2: Comparação qualitativa das soluções numéricas e analíticas. Para os casos (i), (ii) têm-se: 513 nodos, $t = 1$, $CFL = 0.8$. Os parâmetros são: $\mu_w = \mu_o = 1$, $\rho_w = 1$, $\rho_o = 0.1$, $d = -0.15$, $q = 0.1$ e $q_w = 0.01$. Os dados iniciais para (i) foram $s_l^0 = 1$ e $s_r^0 = 0.62$, enquanto para (ii), $s_l^0 = 0.45$ e $s_r^0 = 0.8$. Os dados iniciais de Riemann tanto para (i) como para (ii) correspondem ao caso (b) da conjectura 5.2.1. $M_l = 0.39$ e $s_r^+ = 0.62$

- **Caso 2: $\rho_{wo} < 0$ (Caso em que o óleo é mais denso que a água)**

Para este caso tem-se que a água é menos densa que o óleo, é possível a obtenção de uma variedade de soluções, a partir da evolução no tempo das diferentes proporções de saturações iniciais destes fluidos. Nas Figuras 6.5-6.8 são apresentadas do lado esquerdo as soluções numéricas obtidas com o auxílio do método *LEB2* e da regularização (6.3). Do lado direito das mesmas são expostos os respectivos perfis aproximados das soluções obtidas pelo método analítico da extensão da construção geométrica de Oleinik com a conjectura 5.2.2. Expõem-se nas 6.5-6.8 uma maior quantidade de exemplos que no capítulo 5. Especificamente, para cada caso (a), (b), (c),(d) da conjectura 5.2.1 mostram-se dois subcasos.

Na Figura 6.5, tem-se dois exemplos de soluções (i) e (ii), que apresentam como diferença o estado inicial à direita s_r^0 , tal fato caracteriza a presença de uma onda de choque com velocidade positiva a mais em (i) que em (ii). Fisicamente, percebe-se que devido aos fenômenos convectivos e pelo fato de se estar considerando a água menos densa que o óleo, o mesmo tende, com o passar do tempo, a se depositar na parte inferior do reservatório.

Na Figura 6.7, fica evidente uma das relevâncias do presente trabalho. Caso não houvesse o perfil esquemático obtido através da construção geométrica apresentada no capítulo 5, poderia-se analisar de maneira equivocada a solução para este caso tentando a interpretar o estado constante da mesma, como oscilações espúrias após o choque, que é conhecido em literatura como "undershoot"[25].

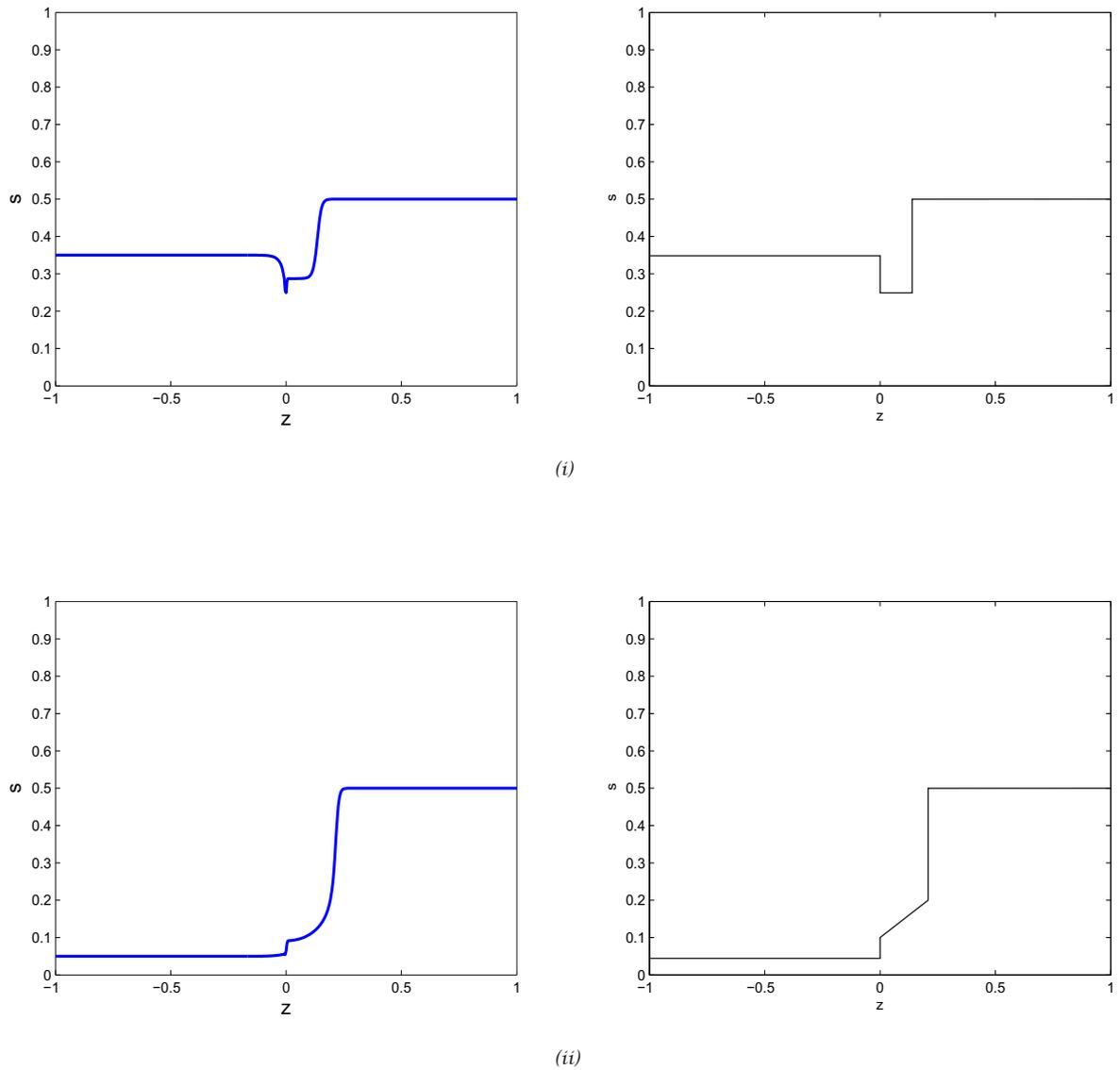


Figura 6.3: Comparação qualitativa das soluções numéricas e analíticas. Para os casos (i), (ii) têm-se: 513 nodos, $t = 1$, $CFL = 0.9$. Os parâmetros são: $\mu_w = \mu_o = 1$, $\rho_w = 1$, $\rho_o = 0.1$, $d = -0.15$, $q = 0.1$ e $q_w = 0.01$. Os dados iniciais para (i) foram $s_l^0 = 0.35$ e $s_r^0 = 0.5$, enquanto para (ii), $s_l^0 = 0.05$ e $s_r^0 = 0.5$. Os dados iniciais de Riemann tanto para (i) como para (ii) correspondem ao caso (c) da conjectura 5.2.1. $M_l = 0.39$ e $s_r^{**} = 0.63$ em (i) e $s_r^{**} = 0.76$ em (ii).

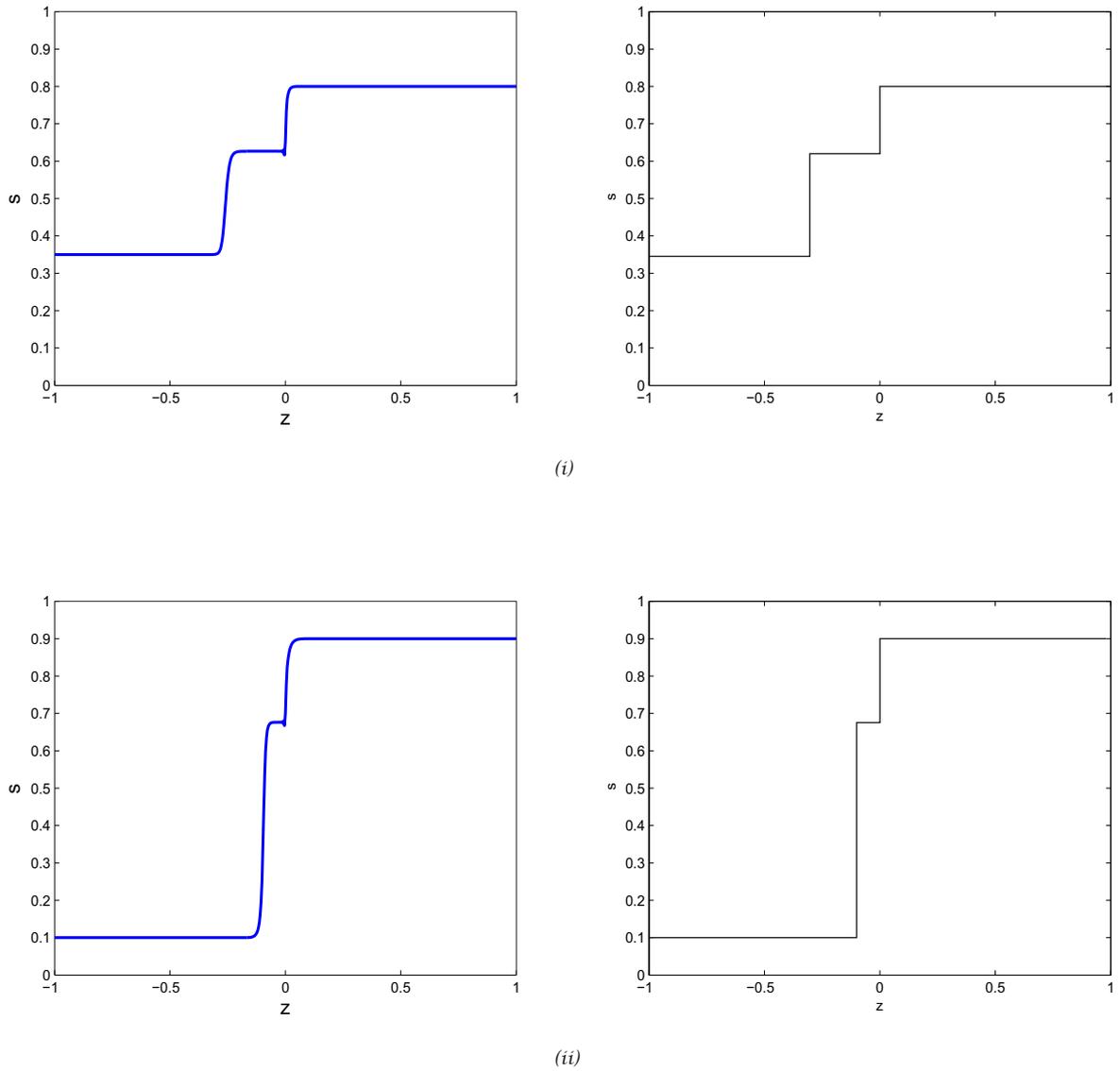


Figura 6.4: Comparação qualitativa das soluções numéricas e analíticas. Para os casos (i), (ii) têm-se: 513 nodos, $t = 1$, $CFL = 0.8$. Os parâmetros são os mesmos da Figura 6.2. Os dados iniciais para (i) foram $s_l^0 = 0.35$ e $s_r^0 = 0.8$, enquanto para (ii), $s_l^0 = 0.1$ e $s_r^0 = 0.9$. Os dados iniciais de Riemann tanto para (i) como para (ii) correspondem ao caso (d) da conjectura 5.2.1. $M_l = 0.39$ e $s_r^{**} = 0.63$ em (i) e $s_r^{**} = 0.7$ em (ii).

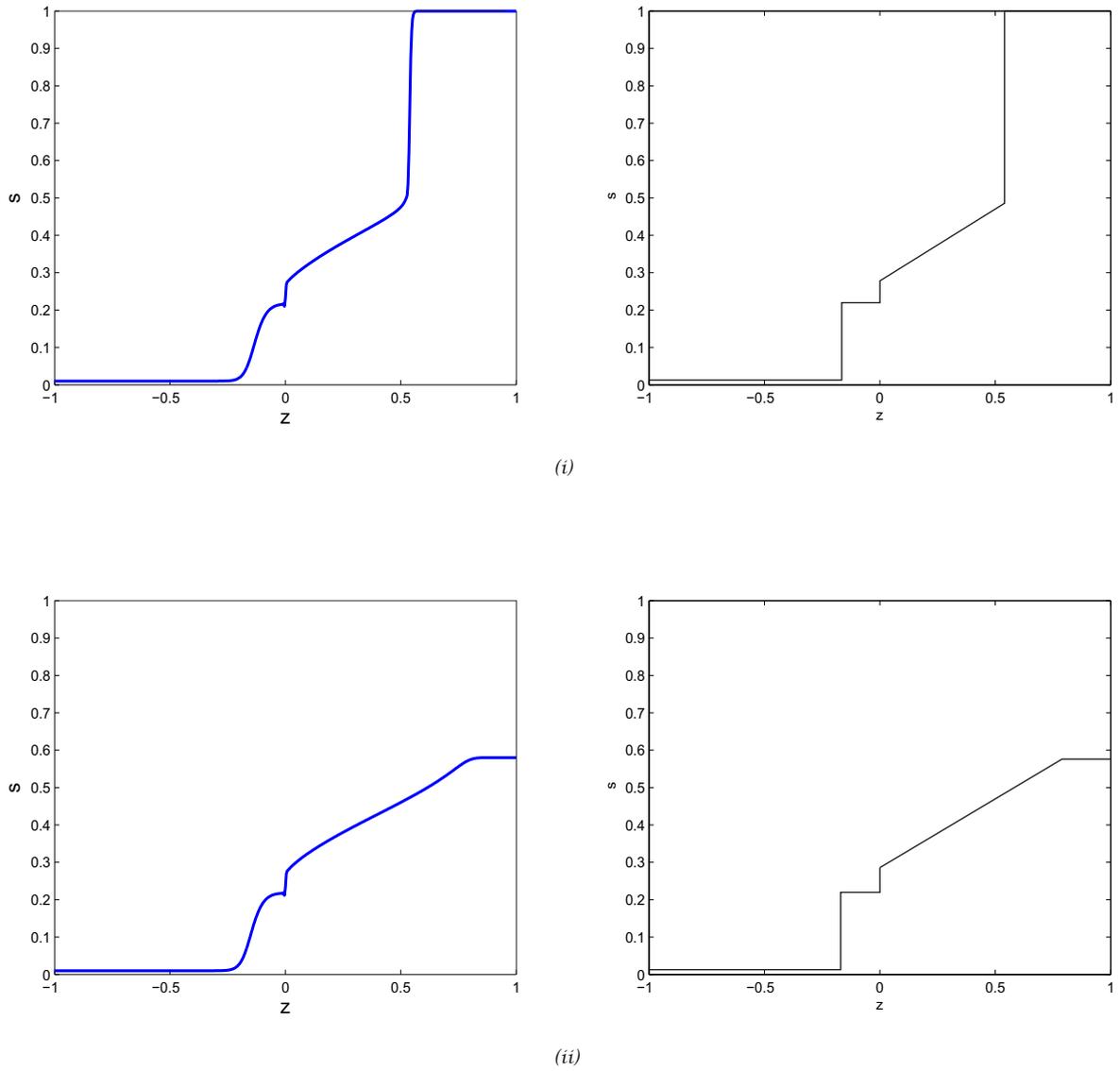


Figura 6.5: Comparação qualitativa das soluções numéricas e analíticas. Para os casos (i), (ii) têm-se: 513 nodos, $t = 1$, $CFL = 0.7$. Os parâmetros são: $\mu_w = \mu_o = 1$, $\rho_w = 0.1$, $\rho_o = 1$, $d = 0.15$, $q = 0.15$ e $q_w = 0.01$. Os dados iniciais para (i) foram $s_l^0 = 0.01$ e $s_r^0 = 1$, enquanto para (ii), $s_l^0 = 0.01$ e $s_r^0 = 0.58$. Os dados iniciais de Riemann tanto para (i) como para (ii) correspondem ao caso (a) da conjectura 5.2.2. $M_r = 0.29$ e $s_l^+ = 0.55$.

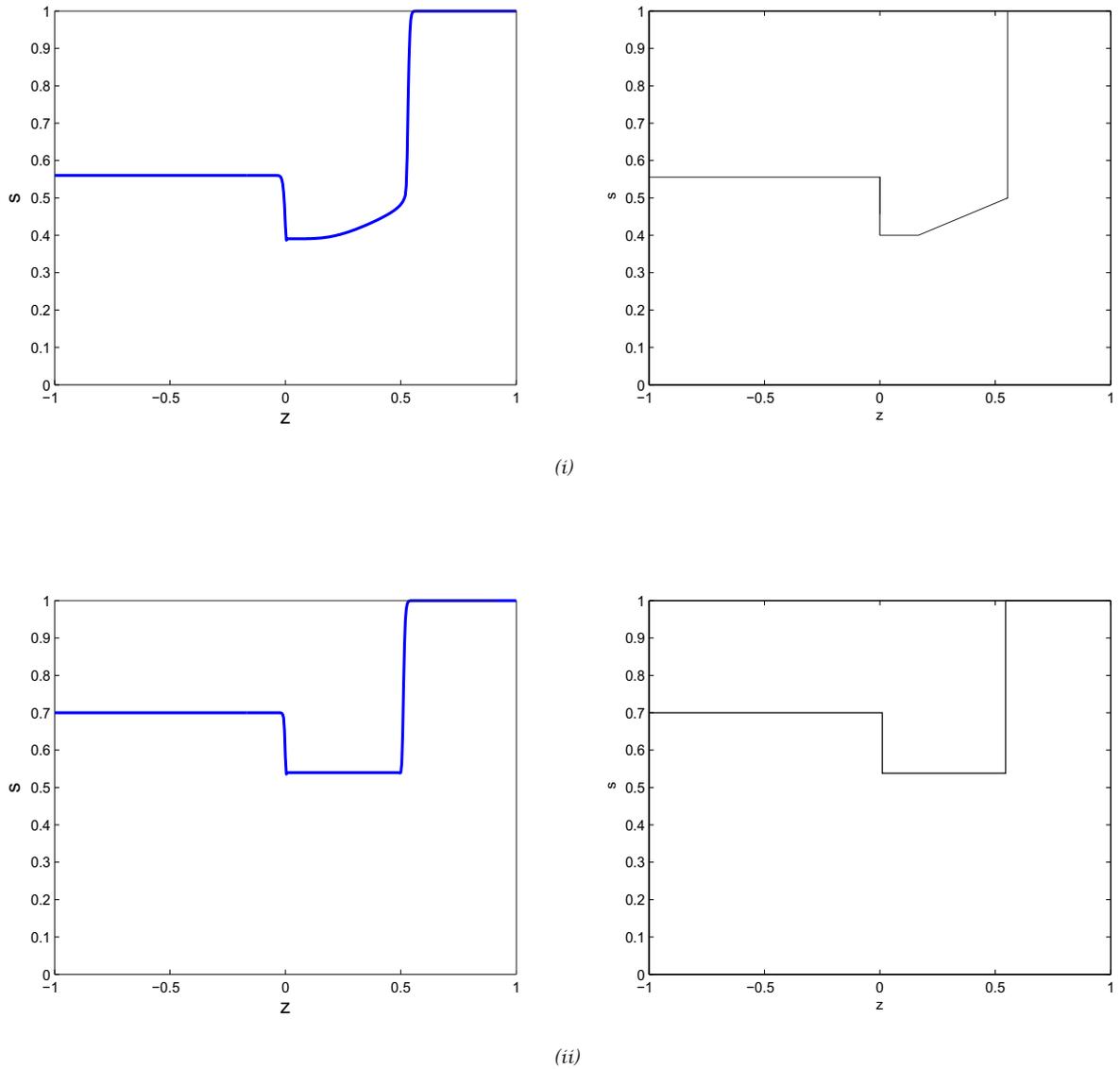


Figura 6.6: Comparação qualitativa das soluções numéricas e analíticas. Para os casos (i), (ii) têm-se: 513 nodos, $t = 1$, $CFL = 0.7$. Os parâmetros são os mesmos da Figura 6.5. Os dados iniciais para (i) foram $s_l^0 = 0.56$ e $s_r^0 = 1$, enquanto para (ii), $s_l^0 = 0.7$ e $s_r^0 = 1$. Os dados iniciais de Riemann tanto para (i) como para (ii) correspondem ao caso (b) da conjectura 5.2.2. $M_r = 0.29$ e $s_l^+ = 0.55$.

Todas as soluções numéricas apresentadas nas Figuras 6.1- 6.8 foram obtidas com o auxílio da regularização (6.3). Escolheu-se tal regularização para obter estas soluções, pois os resultados obtidos com o auxílio desta estão, em termos qualitativos, bem próximos dos apresentados pela regularização (6.4). Na Figura 6.9 tem-se no lado esquerdo em (i) a solução encontrada com a regularização (6.3) e em (ii) com a regularização (6.4). Do lado direito encontram-se os respectivos perfis esquemáticos obtidos pela extensão da construção geométrica de Oleinik.

Em todos os casos apresentados as soluções numéricas apresentam qualitativamente o mesmo comportamento das respectivas analíticas, o que de certa forma corrobora o fato de que o método apresenta um bom desempenho para capturar ondas estacionárias. O uso da regularização do delta de Dirac foi de fundamental importância para implementação do termo fonte, visto que trabalha com uma função contínua salvo discretização.

Destaca-se o fato de que as soluções construídas são as entrópicas, isto é, são as soluções fisicamente esperadas pelas diferenças de densidades e pelas proporções de saturações em cada uma das misturas separadas pela interface. No capítulo seguinte são apresentadas as conclusões obtidas ao longo do desenvolvimento do presente trabalho.

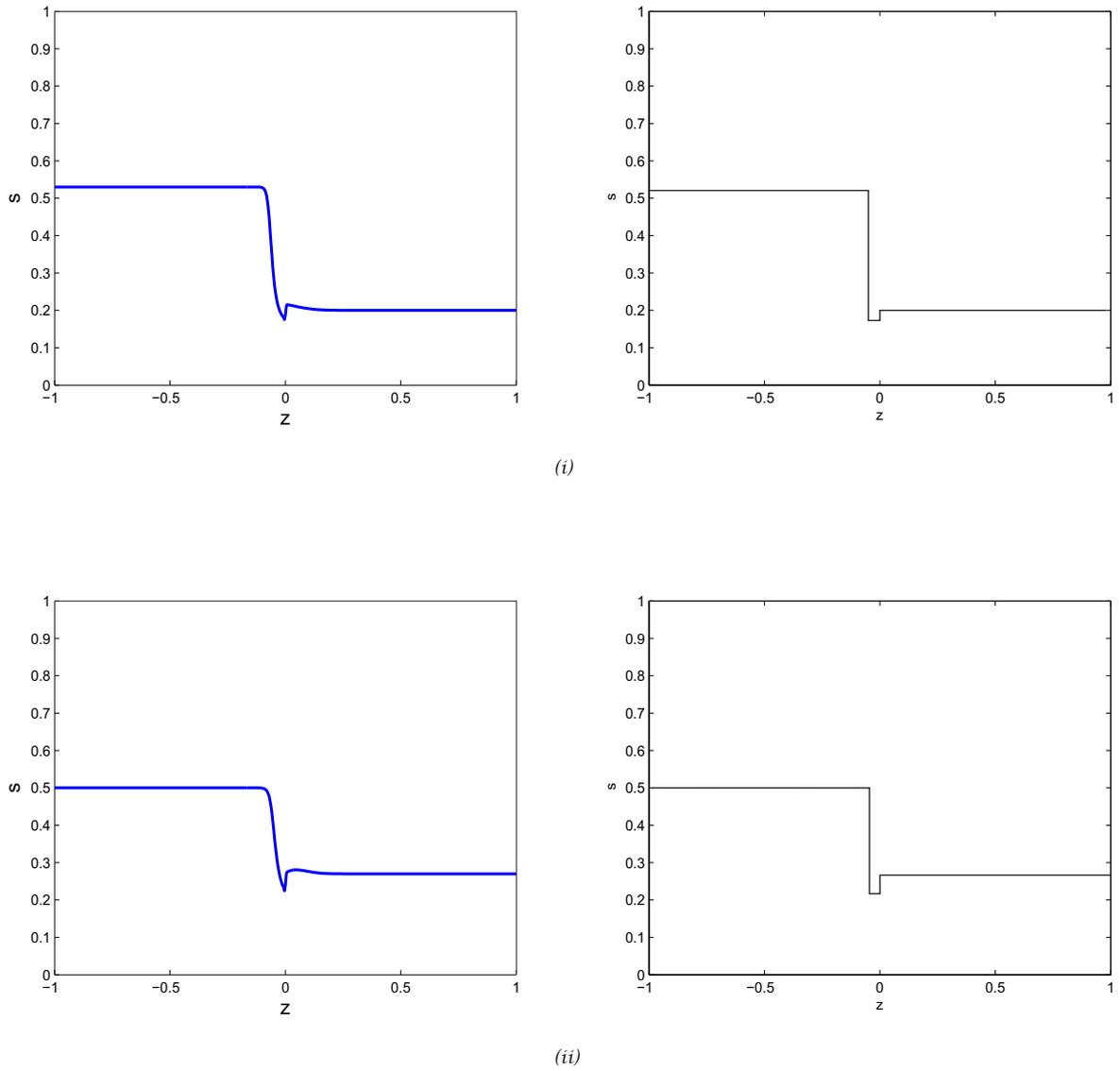


Figura 6.7: Comparação qualitativa das soluções numéricas e analíticas. Para os casos (i), (ii) têm-se: 513 nodos, $t = 1$, $CFL = 0.6$. Os parâmetros são os mesmos da Figura 6.5. Os dados iniciais para (i) foram $s_l^0 = 0.53$ e $s_r^0 = 0.2$, enquanto para (ii), $s_l^0 = 0.5$ e $s_r^0 = 0.27$. Os dados iniciais de Riemann tanto para (i) como para (ii) correspondem ao caso (c) da conjectura 5.2.1. $M_l = 0.29$ e $s_l^* = 0.58$ em (i) e $s_l^* = 0.56$ em (ii).

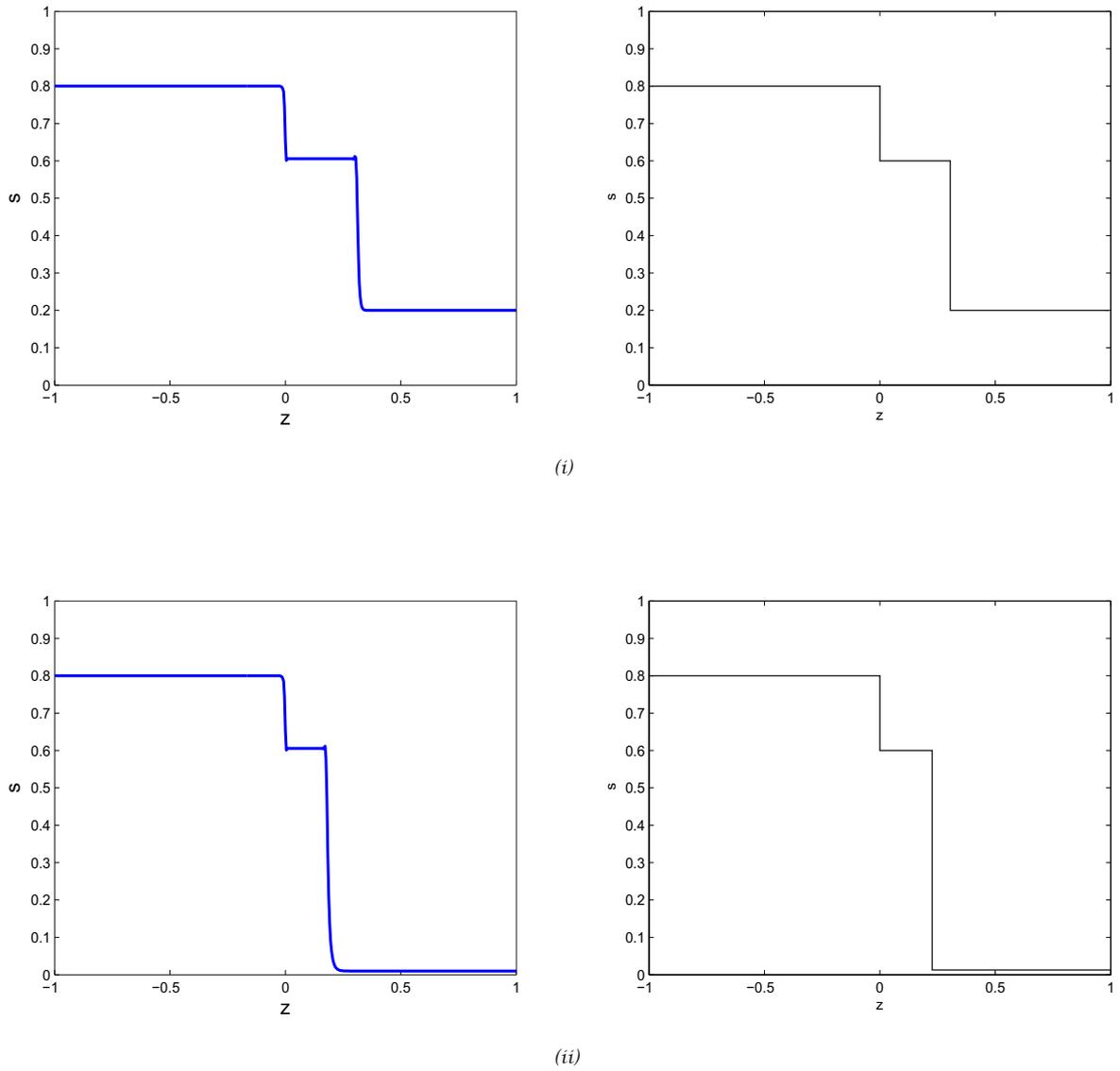


Figura 6.8: Comparação qualitativa das soluções numéricas e analíticas. Para os casos (i), (ii) têm-se: 513 nodos, $t = 1$, $CFL = 0.8$. Os parâmetros são os mesmos da Figura 6.5. Os dados iniciais para (i) foram $s_l^0 = 0.8$ e $s_r^0 = 0.2$, enquanto para (ii), $s_l^0 = 0.8$ e $s_r^0 = 0.01$. Os dados iniciais de Riemann tanto para (i) como para (ii) correspondem ao caso (d) da conjectura 5.2.1. $M_l = 0.29$ e $s_l^* = 0.58$ em (i) e $s_l^* = 0.6$ em (ii).

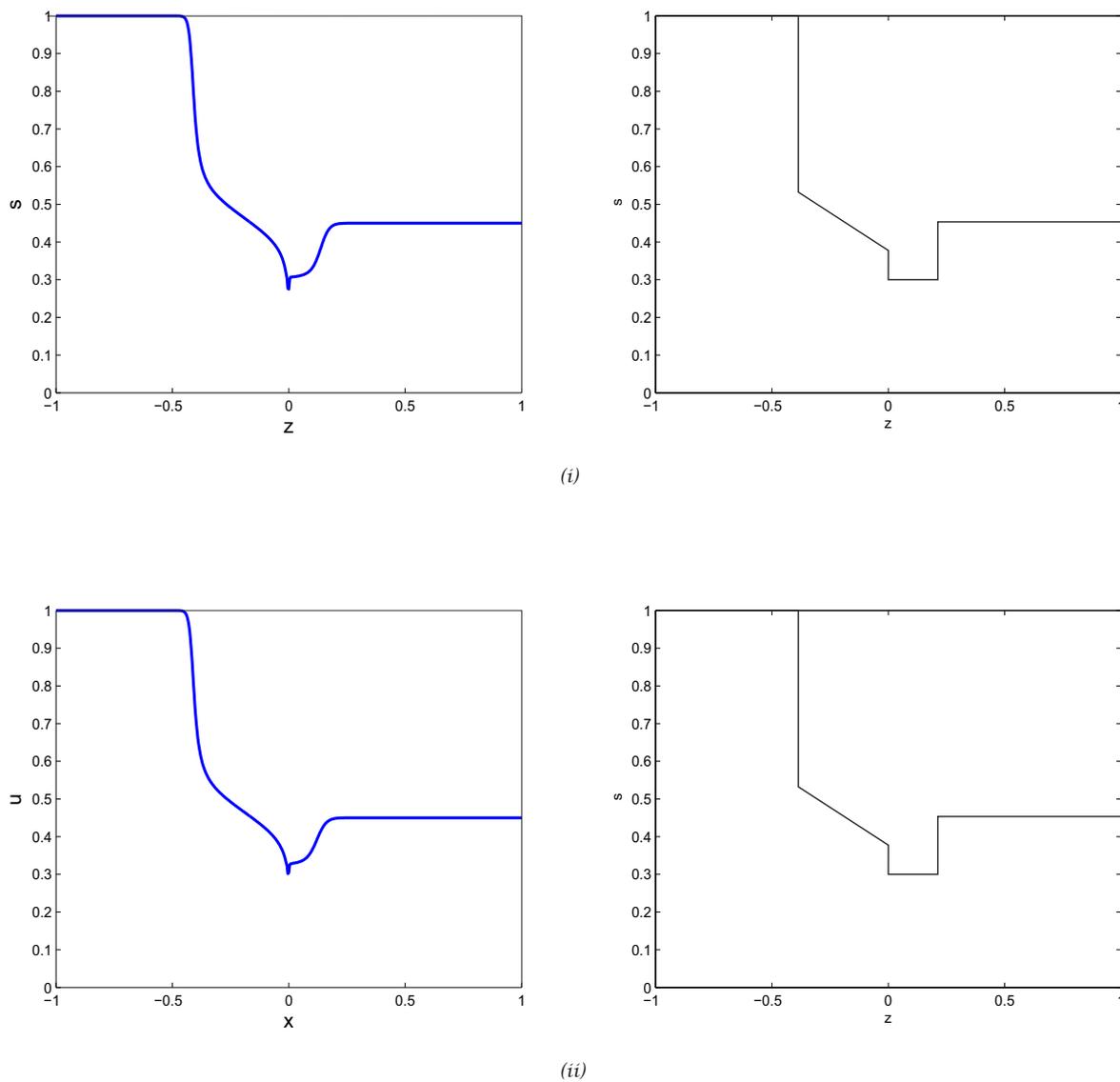


Figura 6.9: Comparação entre as regularizações. Para os casos (i), (ii) têm-se: 513 nodos, $t = 1$, $CFL = 0.68$. Os parâmetros são: $\mu_w = \mu_o = 1$, $\rho_w = 1$, $\rho_o = 0.1$, $d = -0.15$, $q = 0.1$ e $q_w = 0.01$. Os dados iniciais são $s_l^0 = 1$ e $s_r^0 = 0.45$, para ambos os casos.

Capítulo 7

Conclusões e Trabalhos Futuros

7.1 Conclusões

No presente trabalho foi apresentado um modelo para descrever o escoamento bifásico vertical em um meio poroso sob a ação de um termo de fonte singular δ de Dirac que representa uma injeção pontual em $z = 0$. Tal modelo foi descrito, matematicamente, por uma lei de balanço que apresenta função de fluxo não-linear côncava-convexa com uma descontinuidade em relação à variável espacial como consequência da presença do termo fonte do tipo δ de Dirac. Dado que o método da construção geométrica "clássica de Oleinik" não se aplica neste caso, utilizou-se uma extensão do mesmo baseada no trabalho de Kaasschieter [13] que permitiu a construção de um novo critério de entropia próprio para o presente trabalho. Tal critério foi enunciado em forma de duas conjecturas 5.2.1 e 5.2.2 que permite construir as soluções, fisicamente, corretas para o problema de injeção estudado.

Em primeiro momento, por questões intuitivas era sabido que as soluções seriam compostas de sequências de ondas elementares, as quais satisfazem o critério de entropia de Oleinik, para $z < 0$ e $z > 0$. Entretanto, pela particularidade de todas as soluções possuírem uma onda estacionária uma extensão direta da construção de Oleinik era insuficiente.

Do ponto de vista numérico foi apresentado um esquema de diferenças finitas na estrutura Lagrangeana-Euleriana, próprio para leis de conservação hiperbólicas (LEH2) e para leis de balanço (LEB2). Fez-se uma implementação deste método acrescentando um tratamento especial de regularização do termo fonte. Para obtenção da solução numérica, fez-se em um primeiro momento uma validação do código computacional utilizando três exemplos. O método (LEH2) apresentou ótimo comportamento convergindo para as soluções entrópicas, como por exemplo no caso da equação de Buckley-Leverett. Após a

etapa de validação tinha-se a compreensão de que o código estava funcionando de maneira eficiente.

Dentre as dificuldades numéricas encontradas no trabalho estava a presença de uma função de fluxo descontínua, assim como um termo de fonte singular na forma de δ de Dirac. Para tratar a descontinuidade no fluxo utilizou-se uma função de fluxo numérico consistente capaz de capturá-la, a expressão do fluxo numérico foi tomada de Sepúlveda [22]. E para tratar o termo de fonte sigular, recorreu-se a um processo de regularização que permitiu definir a "função" delta de maneira contínua em relação à malha computacional (salvo discretização) [26].

Em termos gerais para os casos estudados o método apresenta bom desempenho sendo capaz de capturar as ondas de choque e rarefação, assim como as ondas estacionárias. O método também resultou efetivo no tratamento do termo fonte singular (δ de Dirac), onde o processo de regularização tem importante papel. Por fim, a comparação qualitativa entre as soluções numéricas e os perfis aproximados das soluções analíticas obtidas pelo método da construção geométrica resultou em um artifício de "validar" ambos os resultados.

Destaca-se as importantes dificuldades tanto analíticas quanto numéricas encontradas no presente trabalho para resolver o problema de injeção. A teoria "clássica" que trabalha com leis de conservação escalares, não se aplica quando a função de fluxo é descontínua. Por outro lado, a maioria dos métodos numéricos "clássicos" baseados em diferenças finitas não apresentam efetivo com fluxos descontínuos e tanto pouco quando há a presença de termos fontes singulares. Evidenciando, assim, a importância dos resultados obtidos no presente trabalho.

7.2 Trabalhos futuros

Por fim, propõe-se o estudo de três tópicos que possam dar continuidade ao presente trabalho.

- Estudar o mesmo modelo para mais de uma dimensão no ponto de vista numérico;
- Comparar a solução obtida por outros métodos numéricos de alta resolução tipo Godunov;
- Provar as conjecturas construídas no capítulo 5.

ANEXO A - Método Numérico de Diferenças Finitas e Algoritmos

Os métodos numéricos utilizados no presente trabalho (*LEH2* e *LEB2*) têm suas construções iniciais a partir de um volume de controle na estrutura Lagrangeana, entretanto estes métodos chegam a equações discretas finais na estrutura Euleriana, o que os tornam métodos de diferenças finitas. Assim, para que o trabalho fique mais autosuficiente, apresenta-se de maneira breve o método de diferenças finitas.

A.1 Método de Diferenças Finitas

O método de diferenças finitas é um método numérico de resolução de equações diferenciais. Em termos gerais o método consiste em discretizar o domínio através de uma malha e substituir as derivadas presentes na equação diferencial por aproximações, representando, assim, esta por equações algébricas [14].

Inicialmente, para se estabelecer o método de diferenças finitas, deve-se construir uma malha, que representa um conjunto discreto de pontos pertencentes ao domínio, estes pontos são denominados de nodos e a distância entre dois nodos seguidos é denominado de célula. Na Figura A.1, tem-se um exemplo de uma malha unidimensional, cujo comprimento da célula é dado por Δz . Quando Δz é o mesmo para todas as células da malha, tem-se uma malha uniforme, caso contrário uma malha não-uniforme [14, 25].



Figura A.1: Esquema de uma malha uniforme em 1 dimensão.

A ferramenta básica para calcular as aproximações para as derivadas é a série de Taylor. Assim, se $f(z)$ é uma função que possui derivadas até a ordem n em z , a expansão

da série de Taylor é dada por:

$$f(z + \Delta z) \simeq f(z) + \frac{\partial f}{\partial z} \Delta z + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \frac{(\Delta z)^2}{2!} + \dots + \frac{\partial^{n-1} f}{\partial z^{(n-1)}} \frac{(\Delta z)^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{\partial^n f}{\partial z^{(n)}} \frac{(\Delta z)^n}{n!} \quad (\text{A.1})$$

onde o último da equação (A.1) representa o erro da aproximação de $f(z + \Delta z)$ pelo polinômio de grau $(n-1)$.

A partir da equação (A.1) é possível obter as seguintes fórmulas para representar a primeira derivada de $f(z)$.

- **Fórmula Progressiva**

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} + O(\Delta z), \quad (\text{A.2})$$

onde o termo $O(\Delta z)$ é erro de truncamento, que representa o erro devido a aproximar a primeira derivada por diferenças finitas.

- **Fórmula Regressiva**

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{f(z) - f(z - \Delta z)}{\Delta z} + O(\Delta z), \quad (\text{A.3})$$

onde o termo $O(\Delta z)$ é erro de truncamento.

- **Fórmula Centrada**

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{f(z + \Delta z) - f(z - \Delta z)}{2\Delta z} + O(\Delta z)^2, \quad (\text{A.4})$$

onde o termo $O(\Delta z)^2$ é erro de truncamento para aproximação da primeira derivada por diferença centrada. Destaca-se o fato de o erro para esta fórmula ser menor do que o erro da fórmula progressiva e regressiva [14, 25].

A.2 Algoritmos

O Algoritmo 1 representa uma possível implementação do método *LEH2*. O algoritmo procede da seguinte maneira: primeiramente, uma malha 1D é gerada, a seguir definem-se as condições iniciais e o passo de tempo a partir da condição *CFL*, para que seja garantida a estabilidade do método. A partir dos dados iniciais é possível obter a solução para um determinado tempo desejado através de um ciclo iterativo. O Algoritmo 2 apresenta uma

possível representação para o método *LEB2*. A estrutura deste é análoga ao do método *LEH2*, sendo que apresenta como diferença a necessidade de determinar uma aproximação para o termo fonte em cada nodo dentro do ciclo iterativo.

Destaca-se o fato de que apesar de os métodos *LEH2* e *LEB2* terem origem em volumes de controle na estrutura Lagrangeana, os métodos chegam a equações discretas tipo diferenças finitas na estrutura Euleriana. Assim, as definições de malhas uniformes e não-uniformes são de grande relevância no processo de construção dos métodos, entretanto em termos de implementação, pode-se usar por simplicidade malha uniforme. Para construção dos algoritmos se considera as entradas e saídas a seguir.

Entradas:

- l : comprimento da malha;
- nz : número de nodos da malha;
- S^0 : dados iniciais;
- tn : tempo máximo ("final");
- n : número inteiro maior ou igual a 2;
- CFL : condição CFL que satisfaça a estabilidade do método;

Saídas:

- S_j^n : solução numérica no tempo $t = n$ e $j = 1, 2 \dots nz$
- $Sesq_j^n$: solução numérica para os nodos a esquerda de S_j^n .
- $Sdir_j^n$: solução numérica para os nodos a direita de S_j^n .
- g_j^n : linhas de rastreamentos.

Algoritmo 1 LEH2

- 1: Comprimento das células para uma malha uniforme: $h = \Delta z = \frac{l}{nz - 1}$;
 - 2: Passo de tempo: $k = CFL * h$;
 - 3: Enquanto ($t \leq tn$)
 - 4: Para $j = 1..nz$
 - 5: Se $j = 1$
 - 6: $Sesq_j^n = S^0$
 - 7: Senão se
 - 8: $Sesq_j^n = S_{j-1}^n$
 - 9: Fim Se
 - 10: Fim Se
 - 11: Fim Para
 - 12: Para $j = 1..nz$
 - 13: Se $j = nz$
 - 14: $Sdir_j^n = S^0$
 - 15: Senão se
 - 16: $Sdir_j^n = S_{j+1}^n$
 - 17: Fim Se
 - 18: Fim Se
 - 19: Fim Para
 - 20: Para $j = 1..nz$
 - 21: Se $j \neq 1$ ou $j \neq 2$ ou $j \neq (nz - 1)$ ou $j \neq nz$
 - 22: $S_j^{n+1} = \frac{1}{4}(S_{j-1}^n + 2S_j^n + S_{j+1}^n) - \frac{k}{2h}(F(S_{j+1}^n) - F(S_{j-1}^n))$
 - 23: Senão se $j = 1$ ou $j = 2$ ou $j = (nz - 1)$ ou $j = nz$
 - 24: $S_j^{n+1} = S^0$
 - 25: Fim Se
 - 26: Fim Se
 - 27: Fim Para
 - 28: $t = t + h$
 - 29: Fim Enquanto
 - 30: Saída S_j^{n+1} .
-

Algoritmo 2 *LEB2*

-
- 1: Comprimento das células para uma malha uniforme: $h = \Delta z = \frac{l}{nz - 1}$;
 - 2: Passo de tempo: $k = CFL * h$;
 - 3: Enquanto ($t \leq tn$)
 - 4: Para $j = 1 \dots nz$
 - 5: Se $j = 1$
 - 6: $Sesq_j^n = S^0$
 - 7: Senão se
 - 8: $Sesq_j^n = S_{j-1}^n$
 - 9: Fim Se
 - 10: Fim Se
 - 11: Fim Para
 - 12: Para $j = 1 \dots nz$
 - 13: Se $j = nz$
 - 14: $Sdir_j^n = S^0$
 - 15: Senão se
 - 16: $Sdir_j^n = S_{j+1}^n$
 - 17: Fim Se
 - 18: Fim Se
 - 19: Fim Para
 - 20: Para $j = 1 \dots nz$
 - 21: $g_j^n = \frac{F(S_j^n)}{S_j^n}$
 - 22: Fim Para
 - 23: Para $j = 1 \dots nz$
 - 24: Se $j \neq 1$ ou $j \neq 2$ ou $j \neq (nz - 1)$ ou $j \neq nz$
 - 25: $S_j^{n+1} = \frac{1}{4}(S_{j-1}^n + 2S_j^n + S_{j+1}^n) - \frac{k}{2h}(F(S_{j+1}^n) - F(S_{j-1}^n)) + \frac{1}{h}[\frac{1}{h}(\frac{h}{2} + g_j^n k) \int \int_{D_{j-1}^n} Q(s(z, t)) dz dt + \frac{1}{h}(\frac{h}{2} - g_j^n k) \int \int_{D_j^n} Q(s(z, t)) dz dt]$
 - 26: Senão se $j = 1$ ou $j = 2$ ou $j = (nz - 1)$ ou $j = nz$
 - 27: $S_j^{n+1} = S^0$
 - 28: Fim Se
 - 29: Fim Se
 - 30: Fim Para
 - 31: $t = t + h$
 - 32: Fim Enquanto
 - 33: Saída S_j^{n+1} .
-

Referências

- [1] P. Rodríguez-Bermúdez. *Buoyancy Driven Three-Phase Flow in Porous Media*. Thesis, IMPA, 2010.
- [2] L.P. Dake. *fundamentals of reservoir engineering*. ELSEVIER, 1998.
- [3] G.F.B. Riemann. Über die fortflanzung eber luftwellen van endlicher schwingungsweite. *Abhandlungem der Gesellschaft der Wissenschaften Zu Gottingen*, 43 (8), 1860.
- [4] J. Smoller. *Shock Waves and Reaction-Diffusion Equations*. Springer-Verlag, 1994.
- [5] Ma Yu. Chen Z., Huan G. *Computational Methods for Multiphase Flows in Porous Media*. SIAM, Philadelphia, 2006.
- [6] Leverett M. Buckley, S. Mechanisms of fluid displacement in sands. *Trans. AIME*, (146), 1942.
- [7] W. Proskurowski. A note solving the buckley-leverett equation in the presence of gravity. *J.Comput. Phys.*, (41), 1981.
- [8] Kaasschieter. Solving the buckley-leverett equation with gravity in a heterogeneous porous medium. *Comput. Geosci.*, (3), 1999.
- [9] Santos M.M. Bonet J.E. Cunha, M.C.C. Buckley-leverett mathematical and numerical models describing vertical equilibrium process in porous media. *International Journal of Engineering Science*, 42, 2004.
- [10] S. Mancuso. Métodos numéricos euleriano-lagrangeanos para leis de conservação. *Thesis, UERJ*, 2008.
- [11] O. Oleinik. Discontinuous solutions nonlinear differential equations. *Amer. Math. Soc. Trans. Ser.2*, 26, 1957.
- [12] Paes-Leme P.J. Marchesin, D. Problemas de riemann para equações hiperbólicas não-homogêneas para fluxo de fluidos. *Atas do XIV Colóquio Brasileira de Matemática*, 1983.
- [13] J.A.P. Sepúlveda. Lagrangian-eulerian approximate methods for balance laws and hyperbolic conservation laws. *Thesis, UNICAMP*, 2015.
- [14] D. Kroner. *Numerical Schemes for Conservation Laws*. Wiley-Teubner Series, Advances in Numerical Mathematics, 1997.
- [15] Tornberg-A.K. Tsai R. Engquist, B. Discretization of dirac delta functions in level set methods. *Journal Computational Physics*, 207, 2005.

-
- [16] R.J. LeVeque. *Finite-Volume Methods for Hyperbolic Problems*. Cambridge Texts in Applied Mathematics, 2004.
- [17] Zachmanoglou-E.C. Thoe, D.W. *Introduction to partial differential equations with applications*. Dover, 1986.
- [18] R.J. LeVeque. *Numerical Methods for Conservation Laws*. Lectures in Mathematics. ETH, Zurich, 1992.
- [19] C.J. van Duijin. *An Introduction to Conservation Laws: Theory and Applications to Multi-Phase Flow*. Eindhoven University of Technology, 2003.
- [20] J.W. Thomas. *Numerical Partial Differential Equations: Conservation Laws and Elliptic Equations*. exts in Applied Mathematics 33. Springer-Verlag, NY, 1999.
- [21] Mishra-S. Risebro N.H. Karlsen, K.H. Well-balanced schemes for conservation laws with source terms based on a local discontinuous flux formulation. *Mathematics of Computation*, 78, 2008.
- [22] J.-Gowda G.D.V. Adimurthi, Jaffré. Godunov-type methods for conservation laws with a flux function discontinuous in space. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 42, 2005.
- [23] G.; Bretti. Modeling and numerics for porous media and traffic flows. *Thesis. Università Degli Studi di Roma*.
- [24] L. Schwartz. *Théorie des distributions*. Hermamm, 1966.
- [25] Anderson D.A. *Computational Fluid Mechanis and Heat Transfer*. McGraw Hill, 1984.
- [26] W.K. Lyons. Conservation laws with sharp inhomogeneities. *Quart.Appl.Mat.*, 40, 1983.