

CONFERENCIA N° 1: GENERALIDADES SOBRE LAS LEYES DE CONSERVACIÓN.**CONFERENCIA N° 1: GENERALIDADES SOBRE LAS LEYES DE CONSERVACIÓN.****1. LEYES DE CONSERVACIÓN.**

En las aplicaciones de la matemática a la tecnología y otras ciencias particulares (principalmente la mecánica clásica, la mecánica de fluidos, las ciencias físicas, la química, la biología y otras) aparecen con frecuencia modelos matemáticos que expresan mediante ecuaciones diferenciales la conservación de distintas magnitudes que intervienen en los fenómenos que estudian esas ramas del conocimiento. En general, se trata de ecuaciones de una estructura relativamente simple que aparece reiteradamente en las aplicaciones.

Definición 1.1

Llamaremos **ley de conservación** (en el espacio unidimensional $\mathbb{R} = \{x\}$) a todo sistema hiperbólico de ecuaciones en derivadas parciales de la forma

$$u_t + (f(u))_x = 0, \quad (1.1)$$

donde la función incógnita $u = u(t, x)$ es, en general, una función vectorial de m componentes, cada una de las cuales recibe el nombre de **variable de estado**.

Esta es una ley de conservación de varios estados en un fenómeno físico que transcurre en una dimensión espacial x , representados por las funciones incógnitas (u_1, u_2, \dots, u_m) , $u_j = u_j(x, t)$, que nos dan la magnitud del estado u_j en el punto x en el instante t , se expresa realmente mediante un sistema de m leyes de conservación que involucra a todas las variables de estado.

Por las variables de estado se entiende, en los distintos modelos, aquellas magnitudes que se conservan en los distintos procesos descritos por estas ecuaciones, tales como la masa, presión, la densidad o la energía. Por otra parte, la aplicación $f : \mathbb{R}_u^m \rightarrow T(\mathbb{R}_u^m)$ es un campo vectorial suave en el espacio vectorial euclidiano $\mathbb{R}^m = \{u_1, u_2, \dots, u_m\}$ de las variables de estado, el cual recibe el nombre de **flujo** del sistema (más adelante veremos el por qué de esta denominación).

El sistema (1.1) se dice **hiperbólico** cuando la diferencial $Df(u) : T_u\mathbb{R}^m \rightarrow T_{f(u)}(T(\mathbb{R}_u^m))$ del flujo $f : \mathbb{R}^m \rightarrow T\mathbb{R}^m$ es una aplicación lineal diagonalizable en cada punto $u \in \mathbb{R}^m$ y todos sus valores propios son números reales. Se debe recordar que esta aplicación lineal se representa matricialmente, con respecto a las bases canónicas

$$\left(\left(\frac{\partial}{\partial u_1} \right)_u, \left(\frac{\partial}{\partial u_2} \right)_u, \dots, \left(\frac{\partial}{\partial u_m} \right)_u \right), \left(\left(\frac{\partial}{\partial u_1} \right)_{f(u)}, \left(\frac{\partial}{\partial u_2} \right)_{f(u)}, \dots, \left(\frac{\partial}{\partial u_m} \right)_{f(u)} \right)$$

de $T_u\mathbb{R}^m$ y $T_{f(u)}(T(\mathbb{R}_u^m))$, respectivamente, mediante la llamada matriz de Jacobi

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u_1} & \frac{\partial f_1}{\partial u_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial u_j} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial u_m} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u_1} & \frac{\partial f_2}{\partial u_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial u_j} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial u_m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_i}{\partial u_1} & \frac{\partial f_i}{\partial u_2} & \dots & \frac{\partial f_i}{\partial u_j} & \dots & \frac{\partial f_i}{\partial u_m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_m}{\partial u_1} & \frac{\partial f_m}{\partial u_2} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial u_j} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial u_m} \end{pmatrix} = \left(\frac{\partial f_i}{\partial u_j} \right)_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq m},$$

donde f_1, f_2, \dots, f_m son las funciones componentes del campo vectorial $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$, o sea, $\overrightarrow{f(u)} = f_1(u) \left(\frac{\partial}{\partial u_1} \right)_u + f_2(u) \left(\frac{\partial}{\partial u_2} \right)_u + \dots + f_m(u) \left(\frac{\partial}{\partial u_m} \right)_u$.

Teniendo en cuenta la regla de la cadena, según la cual $(f(u))_x = Df(u) \circ u_x$, vemos que en realidad la ecuación (1.1) es una manera resumida de denotar un sistema de m ecuaciones diferenciales de primer orden con m funciones incógnitas (las variables de estado u_1, u_2, \dots, u_m):

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial t} \\ \frac{\partial u_2}{\partial t} \\ \dots \\ \frac{\partial u_i}{\partial t} \\ \dots \\ \frac{\partial u_m}{\partial t} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u_1} & \frac{\partial f_1}{\partial u_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial u_j} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial u_m} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u_1} & \frac{\partial f_2}{\partial u_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial u_j} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial u_m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_i}{\partial u_1} & \frac{\partial f_i}{\partial u_2} & \dots & \frac{\partial f_i}{\partial u_j} & \dots & \frac{\partial f_i}{\partial u_m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_m}{\partial u_1} & \frac{\partial f_m}{\partial u_2} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial u_j} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial u_m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x} \\ \dots \\ \frac{\partial u_i}{\partial x} \\ \dots \\ \frac{\partial u_m}{\partial x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$\begin{cases} \frac{\partial u_1}{\partial t} + \frac{\partial f_1}{\partial u_1} \frac{\partial u_1}{\partial x} + \dots + \frac{\partial f_1}{\partial u_j} \frac{\partial u_j}{\partial x} \dots + \frac{\partial f_1}{\partial u_m} \frac{\partial u_m}{\partial x} = 0; \\ \frac{\partial u_2}{\partial t} + \frac{\partial f_2}{\partial u_1} \frac{\partial u_1}{\partial x} + \dots + \frac{\partial f_2}{\partial u_j} \frac{\partial u_j}{\partial x} \dots + \frac{\partial f_2}{\partial u_m} \frac{\partial u_m}{\partial x} = 0; \\ \dots \\ \frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial f_i}{\partial u_1} \frac{\partial u_1}{\partial x} + \dots + \frac{\partial f_i}{\partial u_j} \frac{\partial u_j}{\partial x} \dots + \frac{\partial f_i}{\partial u_m} \frac{\partial u_m}{\partial x} = 0; \\ \dots \\ \frac{\partial u_m}{\partial t} + \frac{\partial f_m}{\partial u_1} \frac{\partial u_1}{\partial x} + \dots + \frac{\partial f_m}{\partial u_j} \frac{\partial u_j}{\partial x} \dots + \frac{\partial f_m}{\partial u_m} \frac{\partial u_m}{\partial x} = 0. \end{cases}$$

Hasta aquí hemos considerado una sola variable espacial unidimensional x , pero en general pueden considerarse leyes de conservación en los espacios de dos, tres y más dimensiones. Por ejemplo, en el caso del plano bidimensional $\mathbb{R}^2 = \{(x, y)\}$ podemos tener sistemas de leyes de conservación de la forma

$$u_t + (f(u))_x + (g(u))_y = 0.$$

En este caso la función incógnita $u = u(t, x, y)$ depende del tiempo t y de las variables espaciales x, y ; los flujos f y g son, como antes, campos vectoriales en el espacio euclidiano m -dimensional, ya que, como antes, en el caso general

podemos tener m variables de estado (u_1, u_2, \dots, u_m) . Un ejercicio sencillo para el estudiante es desplegar completamente el sistema de m ecuaciones en derivadas parciales de primer orden correspondientes a la ecuación anterior.

En el caso bidimensional, la hiperbolicidad se define exigiendo que cualquier combinación lineal $(kDf(u) + lDg(u))$ de las diferenciales $Df(u)$ y $Dg(u)$ sea diagonalizable con todos sus valores propios reales.

Se deja al estudiante la tarea de imaginar sistemas hiperbólicos de leyes de conservación en el espacio euclidiano tridimensional $\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z)\}$ o, incluso, en un espacio euclidiano n -dimensional arbitrario $\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n)\}$.

EJEMPLOS.

Comenzaremos con los ejemplos más sencillos en el espacio unidimensional $\mathbb{R}^1 = \{x\}$.

1. ECUACIÓN DE BURGERS.

Una ley de conservación aparece al describir los movimientos en un medio unidimensional, compuesto por partículas que se mueven por inercia sobre una recta, de manera que la velocidad de cada partícula permanece constante. Si denotamos por t el tiempo y por x la coordenada que indica la posición de cada partícula sobre la recta, entonces por $u(t, x)$ denotaremos la velocidad de la partícula que en el instante t se encuentra en el punto x del eje. Supongamos que $x = \varphi(t)$ es la función derivable que describe las posiciones de la partícula en función del tiempo, entonces $\frac{d\varphi}{dt}(t) = u(t, \varphi(t))$ y por tanto $\frac{d^2\varphi}{dt^2}(t) = \frac{\partial u}{\partial t}(t, \varphi(t)) + u(t, \varphi(t)) \frac{\partial u}{\partial x}(t, \varphi(t))$. Teniendo en cuenta que la velocidad de las partículas permanece constante en el movimiento, obtenemos que la aceleración $\frac{d^2\varphi}{dt^2}(t)$ es nula en el transcurso del tiempo. Por consiguiente, el campo de las velocidades u en un medio unidimensional compuesto por partículas que no interactúan entre sí, satisface la ecuación cuasilineal en derivadas parciales de primer orden $\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0$. Esta ecuación se conoce en la literatura con los nombres de ecuación de Euler, de Hopf y también de Burgers.

2. CONSERVACIÓN DE LA MASA EN EL PROBLEMA UNIDIMENSIONAL DE LA DINÁMICA GASEOSA.

Se estudia el flujo de un gas en un tubo, suponiendo que la densidad y la velocidad del gas sean constantes en cada sección transversal del tubo. Si se denota por x la distancia medida a lo largo de un eje que sigue la dirección del tubo (comenzando por el extremo izquierdo del tubo), entonces la densidad del gas en el punto x en el instante t será denotada por $\rho(x, t)$. La masa total del gas en la sección del tubo correspondiente al intervalo $[x_1, x_2]$ se define como la integral

$$\int_{x_1}^{x_2} \rho(x, t) dx.$$

Se parte de las suposiciones que siguen:

- 1) Las paredes del tubo son impermeables; y
- 2) la masa del gas ni se crea ni se destruye en el proceso (en otras palabras, se conserva).

En estas condiciones, el cambio de la masa del gas en el interior de la sección del tubo $[x_1, x_2]$ solamente puede ocurrir a causa del flujo del gas a través de los extremos x_1 y x_2 de dicha sección.

Denotaremos por $v(x, t)$ la velocidad de las partículas del gas al pasar por el punto x en el instante t . Entonces el flujo total del gas que pasa por el punto x en el instante t es igual a $\rho(x, t)v(x, t)$.

Por consiguiente la variación de la masa del gas en el intervalo $[x_1, x_2]$ está dada por la diferencia entre los flujos en (x_1, t) y (x_2, t) . Obtenemos así la **forma integral de la ley de conservación de la masa**:

$$\frac{d}{dt} \left(\int_{x_1}^{x_2} \rho(x, t) dx \right) = \rho(x_1, t)v(x_1, t) - \rho(x_2, t)v(x_2, t). \quad (2.1)$$

Podemos obtener otra forma integral de esta ley de conservación, mediante la cual expresamos la masa del gas en el intervalo $[x_1, x_2]$ en el tiempo $t_2 > t_1$ en términos del flujo total en cada borde durante ese período de tiempo. Para ello integramos ambos miembros de la ecuación anterior entre t_1 y t_2 :

$$\int_{x_1}^{x_2} \rho(x, t_2) dx - \int_{x_1}^{x_2} \rho(x, t_1) dx = \int_{t_1}^{t_2} \rho(x_1, t)v(x_1, t) dt - \int_{t_1}^{t_2} \rho(x_2, t)v(x_2, t) dt. \quad (2.2)$$

Ahora supongamos que las funciones ρ y v son continuamente diferenciables. En ese caso podemos escribir las identidades que siguen:

$$\rho(x, t_2) - \rho(x, t_1) = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial}{\partial t} [\rho(x, t)] dt; \quad (2.3)$$

$$\rho(x_2, t)v(x_2, t) - \rho(x_1, t)v(x_1, t) = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial}{\partial x} [\rho(x, t)v(x, t)] dx. \quad (2.4)$$

Notemos que (2.2) se puede escribir en la forma

$$\int_{x_1}^{x_2} [\rho(x, t_2) - \rho(x, t_1)] dx = \int_{t_1}^{t_2} [\rho(x_1, t)v(x_1, t) - \rho(x_2, t)v(x_2, t)] dt.$$

Sustituyendo ahora las identidades (2.3) y (2.4) en la expresión anterior, resulta

$$\int_{x_1}^{x_2} \left(\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial}{\partial t} [\rho(x, t)] dt \right) dx = - \int_{t_1}^{t_2} \left(\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial}{\partial x} [\rho(x, t)v(x, t)] dx \right) dt$$

lo cual nos da

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} \left\{ \frac{\partial}{\partial t} [\rho(x, t)] + \frac{\partial}{\partial x} [\rho(x, t)v(x, t)] \right\} dx dt = 0. \quad (2.5)$$

Notando que esta identidad se cumple cualesquiera sean la sección del tubo $[x_1, x_2]$ y para cualquier intervalo de tiempo $[t_1, t_2]$, obtenemos la **expresión diferencial de la ley de conservación de la masa**, que es la ecuación en derivadas parciales de primer orden

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\rho v) = 0. \quad (2.6)$$

A menos que consideremos esta ecuación participando de un sistema de leyes de conservación donde aparezcan, además de la densidad ρ y otras magnitudes (en particular, la velocidad v), no podríamos intentar resolverla, a menos que la velocidad sea una función ya conocida a priori o como una función de la densidad, o sea, cuando el producto ρv sea expresable como función de ρ , o sea, $\rho v = f(\rho)$. En ese caso obtenemos como expresión de la conservación de la masa del gas una ley de conservación escalar para la densidad ρ del gas:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (f(\rho)) = 0,$$

la cual se denota también en la forma

$$\rho_t + (f(\rho))_x = 0. \quad (2.7)$$

Notemos que aquí encontramos una generalización de la ecuación que estudiamos anteriormente bajo la denominación de ecuación de Euler, Hopf o Burguers, la cual se obtendría para el caso en que la función f estuviera dada por la fórmula $f(\rho) = \frac{1}{2}\rho^2$.

Continuando con el problema de la conservación de la masa en el flujo de un gas por un tubo, recordemos que el producto de la densidad $\rho(x, t)$ por la velocidad $v(x, t)$ es lo que habíamos llamado anteriormente el flujo del gas en el punto x y en el instante t . De ahí procede la terminología con que suele llamarse a la función $f(\rho)$ en la ley de conservación escalar (2.7), la cual, como ya dijimos al principio de esta conferencia, se conoce como el "**flujo**" de dicha ley de conservación"

Volviendo a la forma integral de la ley de conservación de la masa (2.6) en el problema del flujo de un gas a través de un tubo, conviene decir que la misma se estudia en asociación con las leyes de conservación del momentum ρv y de la energía E , con las cuales conforma un sistema de tres ecuaciones en derivadas parciales en las funciones incógnitas ρ, v y E , el cual presenta la forma

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\rho v) = 0; \\ \frac{\partial}{\partial t} (\rho v) + \frac{\partial}{\partial x} (\rho v^2 + p) = 0; \\ \frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (v(E + p)) = 0. \end{cases}$$

En este sistema aparece la presión p que debe ser especificada como una función dada de $\rho, \rho v$ y E , lo que se conoce como la **ecuación de estado** del gas en estudio,

$$p = p(\rho, \rho v, E).$$

Si en este sistema introducimos las notaciones

$$u(x, t) = \begin{pmatrix} u_1(x, t) \\ u_2(x, t) \\ u_3(x, t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho(x, t) \\ \rho(x, t)v(x, t) \\ E(x, t) \end{pmatrix},$$

podemos reescribirlo en la forma

$$u_t + (f(u))_x = 0,$$

en la cual el flujo $f(u)$ aparece como un campo vectorial continuamente diferenciable definido en el espacio tridimensional $\mathbb{R}_u^3 = \{(u_1, u_2, u_3)\}$, el cual se expresa mediante sus funciones componentes en la forma

$$f(u) = \begin{pmatrix} f_1(u_1, u_2, u_3) \\ f_2(u_1, u_2, u_3) \\ f_3(u_1, u_2, u_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho v^2 + p \\ v(E + p) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_2 \\ \frac{u_2^2}{u_1} + p(u_1, u_2, u_3) \\ \frac{u_2}{u_1}(u_3 + p(u_1, u_2, u_3)) \end{pmatrix}.$$

Nada nos impide considerar sistemas más generales de leyes de conservación (considerando siempre el movimiento en un eje, en función del tiempo) en los cuales consideremos un número finito arbitrario de magnitudes $u_j(x, t), j = 1, 2, \dots, m$, que se conservan y en ese caso el flujo será un campo vectorial continuamente diferenciable f en el espacio euclidiano m -dimensional de las variables $u_j, j = 1, 2, \dots, m$, o sea, $f : \mathbb{R}_u^m \rightarrow T(\mathbb{R}_u^m)$.

En ese caso la **forma integral de la ley de conservación** adopta la forma

$$\frac{d}{dt} \int_{x_1}^{x_2} u(t, x) dx = f(u(t, x_1)) - f(u(t, x_2)), \forall (x_1, x_2, t).$$

(Notar que en ambos miembros de esta ecuación tenemos expresiones vectoriales de m componentes).

Integrando ambos miembros de la igualdad precedente entre t_1 y t_2 , obtenemos otra **forma integral** equivalente de la misma ley de conservación vectorial:

$$\int_{x_1}^{x_2} u(t_2, x) dx - \int_{x_1}^{x_2} u(t_1, x) dx = \int_{t_1}^{t_2} f(u(t, x_1)) dt - \int_{t_1}^{t_2} f(u(t, x_2)) dt, \forall (x_1, x_2, t_1, t_2).$$

Estas formas integrales de expresión de las leyes de conservación son las que se utilizan para generalizar el concepto de solución.

2. MÉTODOS DE RESOLUCIÓN DE LAS ECUACIONES DE LAS LEYES DE CONSERVACIÓN.

ECUACIÓN DE BURGEURS.

Comenzaremos con el ejemplo más sencillo dado anteriormente, la ecuación de Burguers:

$$u_t + u.u_x = 0. \quad (2.1)$$

Esta ecuación pertenece a la clase de las ecuaciones cuasilineales en derivadas parciales de primer orden, que tienen la forma general

$$a_1(t, x, u) u_t + a_2(t, x, u) u_x = b(t, x, u), \quad (2.2)$$

en la cual $u = u(t, x)$ denota la función incógnita y $b : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ es una función suave prefijada cuyo dominio de definición es un abierto Ω del espacio tridimensional $\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_u = \{(t, x, u) : t \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}, u \in \mathbb{R}\}$.

A cada ecuación de esta clase se le asocia un campo vectorial sobre abierto Ω del espacio tridimensional $\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_u$, cuyas componentes son las funciones $a_1(t, x, u), a_2(t, x, u)$ y $b(t, x, u)$, o sea el campo vectorial $v(t, x, u) = a_1(t, x, u) \left(\frac{\partial}{\partial t}\right) + a_2(t, x, u) \left(\frac{\partial}{\partial x}\right) + b(t, x, u) \left(\frac{\partial}{\partial u}\right)$, que se llama el "**campo vectorial característico**" de la ecuación (2.2.). Las curvas de fases del campo vectorial característico se llaman **curvas características** de la ecuación. Se trata, por tanto, de las curvas definidas por las ecuaciones del sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias

$$\begin{cases} \frac{dt}{ds} = a_1(t, x, u); \\ \frac{dx}{ds} = a_2(t, x, u); \\ \frac{du}{ds} = b(t, x, u), \end{cases} \quad (2.3)$$

las cuales llenan el abierto $\Omega \subset \mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_u$ donde está definida la ecuación. Esto significa que por cada punto $(t_0, x_0, u_0) \in \Omega$ pasa una (y solamente una) curva $\varpi : I \rightarrow \Omega$, donde I es un intervalo abierto contenido en la recta \mathbb{R} , que es la solución del sistema precedente de ecuaciones diferenciales ordinarias que satisface la condición inicial $\varpi(0) = (t_0, x_0, u_0) \in \Omega$. Este sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias se escribe también en la llamada "**forma simétrica**"

$$\frac{a_1(t, x, u)}{dt} = \frac{a_2(t, x, u)}{dx} = \frac{b(t, x, u)}{du},$$

la cual expresa de manera más gráfica la interpretación del campo vectorial característico (y de la ecuación cuasilineal que lo define).

Una función continuamente derivable $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ se llama una **primera integral del sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias** (2.3) cuando y solo cuando la derivada direccional de dicha función en la dirección del campo vectorial $v(t, x, u) = a_1(t, x, u) \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) + a_2(t, x, u) \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) + b(t, x, u) \left(\frac{\partial}{\partial u} \right)$ es igual a cero sobre el abierto Ω , o sea, si y solo si $a_1(t, x, u) \frac{\partial \varphi}{\partial t} + a_2(t, x, u) \frac{\partial \varphi}{\partial x} + b(t, x, u) \frac{\partial \varphi}{\partial u} = 0, \forall (t, x, u) \in \Omega$.

Lo anterior es equivalente a decir que la composición de la función $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ con cualquier solución $\varpi : I \rightarrow \Omega$ del sistema de ecuaciones (2.3) es una función constante de la variable $t \in \mathbb{R}$. o sea, $(\varphi \circ \varpi)(t) = K, \forall t \in \mathbb{R}$, donde K es alguna constante real. En otras palabras, las curvas de fases del sistema de ecuaciones diferenciales (2.3) están contenidas enteramente en las superficies de nivel de la primera integral $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, o sea, en los conjuntos $\varphi^{-1}(K) \subset \Omega$, para cada constante $K \in \mathbb{R}$.

Las primeras integrales no constantes de un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias como el sistema (2.3) tienen una importancia tremenda en la construcción de las soluciones de la ecuación cuasilineal en derivadas parciales de primer orden (2.2). Por una parte, existe un teorema que existe que en una vecindad suficientemente pequeña de todo punto (t_0, x_0, u_0) no singular del campo vectorial $v(t, x, u) = a_1(t, x, u) \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) + a_2(t, x, u) \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) + b(t, x, u) \left(\frac{\partial}{\partial u} \right)$ existen siempre dos primeras integrales funcionalmente independientes $\varphi_1 : \Omega_1 \rightarrow \mathbb{R}$ y $\varphi_2 : \Omega_2 \rightarrow \mathbb{R}$, tales que $(t_0, x_0, u_0) \in \Omega_1 \cap \Omega_2 \subset \Omega$, y cualquier otra primera integral φ_3 del sistema se expresa como una función de las dos anteriores, o sea, $\varphi_3(t, x, u) = F(\varphi_1(t, x, u), \varphi_2(t, x, u)), \forall (t, x, u) \in \Omega_1 \cap \Omega_2 \subset \Omega$.

En la teoría de las ecuaciones cuasilineales, la integración de una ecuación arbitraria se reduce a la búsqueda de 2 primeras integrales no constantes φ_1, φ_2

funcionalmente independientes del campo vectorial característico sobre el abierto de definición de la ecuación. En tal caso la solución general de la ecuación se define de manera implícita mediante la ecuación $\Phi(\varphi_1(t, x, u), \varphi_2(x, u)) = 0$, en la que Φ es una función arbitraria continuamente diferenciable con respecto a todos sus argumentos.

En el caso particular de la ecuación de Burguers, el campo vectorial característico es el campo vectorial $1 \cdot \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_{(t,x,u)} + u \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)_{(t,x,u)} + 0 \cdot \left(\frac{\partial}{\partial u}\right)_{(t,x,u)}$ sobre el espacio tridimensional $\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_u$, y las curvas características son las soluciones del sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias

$$\begin{cases} \frac{dt}{ds} = 1; \\ \frac{dx}{ds} = u; \\ \frac{du}{ds} = 0, \end{cases}$$

cuyas curvas de fases son las rectas

$$\begin{cases} t(s) = s + t_0; \\ x(s) = u_0 s + x_0; \quad -\infty < s < +\infty. \\ u(s) = u_0; \end{cases}$$

Esto significa que la curva característica de la ecuación de Euler que pasa por el punto (t_0, x_0, u_0) es la recta que pasa por dicho punto y tiene por vector director al vector $(1, u_0, 0)$.

En otras palabras, las características de la ecuación de Euler son las líneas rectas $\left\{ \begin{matrix} x-x_0=u_0(t-t_0), \\ u=u_0 \end{matrix} \right\}$. Estas rectas se proyectan en el plano (t, x) sobre las rectas cuyas ecuaciones son $x - x_0 = u_0(t - t_0)$. Sobre cada característica la solución toma un valor constante. Por consiguiente, si planteamos para la ecuación de Euler el problema de Cauchy con la condición inicial $u(0, x) = \varphi(x)$, para encontrar la solución basta definir $u(t, x) = u(0, \xi) = \varphi(\xi)$, donde ξ es la abscisa del punto en el cual la proyección de la característica que pasa por el punto (t, x, u) encuentra a la recta $t = 0$.

En el caso de la ecuación de Euler dos primeras integrales no constantes funcionalmente independientes son las funciones $\varpi_1(t, x, u) = u$ y $\varpi_2(t, x, u) =$

$$x - tu, \text{ ya que el rango de la matriz de Jacobi } \begin{pmatrix} \frac{\partial \varpi_1}{\partial t} & \frac{\partial \varpi_1}{\partial x} & \frac{\partial \varpi_1}{\partial u} \\ \frac{\partial \varpi_2}{\partial t} & \frac{\partial \varpi_2}{\partial x} & \frac{\partial \varpi_2}{\partial u} \end{pmatrix} =$$

$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -u & 1 & -t \end{pmatrix}$ es igual a 2 sobre todo el espacio $\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_u$, lo cual indica, precisamente, que esas primeras integrales son funcionalmente independientes. Por tanto, cualquier otra primera integral de este sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias se expresa como una función continuamente derivable de estas dos primeras integrales independientes. Por consiguiente, las soluciones de la ecuación de Burguers se obtendrán a partir de una relación del tipo $F((\varpi_1(t, x, u), \varpi_2(x, u))) = 0$, o sea, $F(u, x - ut) = 0$, donde F es una función continuamente derivable arbitraria con respecto a sus argumentos. Por consiguiente, como $\frac{\partial F}{\partial u} = 1$, se puede escribir en la forma $u = f(x - ut)$, que es

una manera de expresar de manera implícita las soluciones de la ecuación de Burguers. Esta propiedad podrá ser utilizada para encontrar las soluciones de dicha ecuación que satisfagan una condición inicial prefijada. Normalmente se plantea el **problema de Cauchy** para una ecuación cuasilineal cualquiera (en particular, para la ecuación de Burguers).

En general, el problema de Cauchy se plantea dando una función inicial $\varphi : \gamma \rightarrow \mathbb{R}$ definida sobre una superficie suave inicial γ contenida en el dominio U de la ecuación. Decimos que la condición inicial (φ, γ) se llama **no característica** cuando para cada punto $(t_0, x_0, u_0) \in \gamma$, el vector $a_1(t_0, x_0, u_0) \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) +$

$a_2(t_0, x_0, u_0) \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)$ sea transversal (o sea, no tangente) a la superficie inicial. Se demuestra un teorema que establece lo siguiente:

Si la condición inicial (φ, γ) es no característica en el punto $(t_0, x_0, u_0) \in \gamma$, entonces existe una solución de la ecuación $a_1(t, x, u)u_t + a_2(t, x, u)u_x = b(t, x, u)$ que satisface la condición inicial $u|_{\gamma} = \varphi$, definida en una vecindad de (t_0, x_0, u_0) y es única en el sentido de que cualquier otra solución de la misma ecuación, que satisfaga la misma condición inicial, definida en una vecindad del punto (t_0, x_0, u_0) , coincide con la anterior en la intersección de sus dominios de definición.

A título de ejemplo, encontremos la solución del problema de Cauchy para la ecuación de Euler con la condición inicial $u(x, 0) = x - 3$. En este caso la superficie inicial es el plano $\gamma = \{(x, t, u) \in \mathbb{R}^3 : t = 0\}$ y la función inicial es $\varphi : \gamma \rightarrow \mathbb{R}, \varphi(0, x, u) = x - 3$. La condición inicial (γ, φ) es no característica en todo punto $(0, x_0, u_0) \in \gamma$, ya que el vector $1 \cdot \frac{\partial}{\partial t} + (x_0 - 3) \frac{\partial}{\partial x}$ es transversal a γ . Esto significa que la solución del problema planteado existe (y es única) en una vecindad suficientemente pequeña de cada punto de γ . Encontremos la expresión de dicha solución, lo cual puede hacerse de dos maneras distintas:

1º Habíamos mostrado que la solución general de la ecuación de Euler se obtiene despejando u en una relación de la forma $u = f(x - ut)$, donde f es una función suave arbitraria de una variable real. Pero la condición inicial debe ser satisfecha y por tanto $u(x, 0) = f(x - u \cdot 0) = f(x) = \varphi(x) = x - 3$, de donde resulta que $u(x, t) = \varphi(x - u(x, t)t) = x - u(x, t)t - 3$, y por tanto obtenemos nuevamente la expresión $u(t, x) = \frac{x-3}{t+1}$. Notemos que esta solución no está definida sobre todo el plano $\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_x$, aunque para los efectos prácticos es esencial que esté definida sobre el semiplano $\{(t, x) : t \geq 0\}$.

2º El otro método que podemos utilizar es el llamado "**método de las características**". Recordemos que las curvas características de la ecuación Burguers son las líneas rectas definidas mediante las parametrizaciones

$$\begin{cases} t(s) = s + t_0; \\ x(s) = u_0 s + x_0; & -\infty < s < +\infty, \forall (x_0, t_0, u_0) \in \mathbb{R}_t^1 \times \mathbb{R}_x^1 \times \mathbb{R}_u^1. \\ u(s) = u_0; \end{cases}$$

La proyección de cada una de estas rectas sobre el plano $\mathbb{R}_t^1 \times \mathbb{R}_x^1$ se representa en dicho plano por la ecuación $x - x_0 = u_0(t - t_0)$. En particular, la recta $x - x_0 = u_0 t$ que pasa por el punto $(0, x_0)$ es la proyección de una caracterís-

tica que está en el plano $u = u_0$. Sobre dicha característica toda solución de la ecuación de Burguers toma un valor constante (ya que precisamente eso es lo que significa el concepto de primera integral de un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias). Por consiguiente, la solución del problema de Cauchy la solución toma un valor constante sobre la proyección de cada característica. Este hecho tiene trascendental importancia cuando se intenta resolver el problema de Cauchy para la ecuación de Burguers, con la condición inicial $u(x, 0) = u_0(x)$. En efecto, supongamos que se quiere definir el valor de la solución en el punto (t, x) . La proyección de la característica correspondiente, pasa por los puntos (t, x) y $(0, \xi)$, que están sobre la recta $x - \xi = u_0(\xi)t$. Si $\frac{\partial x}{\partial \xi} = 1 + u'_0(\xi)t \neq 0$, entonces se puede expresar ξ como función de t y x , $\xi = \xi(t, x)$. Vemos entonces que el valor de la solución en el punto (t, x) coincide con el valor de la función inicial u_0 en el punto $\xi(t, x)$, en otras palabras, la solución del problema de Cauchy se puede expresar, al menos localmente, mediante la fórmula

$$u = u(t, x) = u_0(\xi(t, x)).$$

En el ejemplo dado tenemos que $x - u(0, \xi)t = \xi$ es la ecuación $x - (\xi - 3)t = \xi$, por tanto si $t + 1 \neq 0$, resulta que $\xi = \frac{x+3t}{t+1}$. Se debenotar que precisamente bajo esta condición, se cumple que $\frac{\partial x}{\partial \xi} \neq 0$, pues, en efecto, $\frac{\partial x}{\partial \xi} = 1 + u'_0(\xi)t$ y como en este caso particular, $u_0(x) = x - 3$, $u'_0(\xi) = 1$ para todo $\xi \in \mathbb{R}$, o sea, $\frac{\partial x}{\partial \xi} = 1 + t \neq 0$. Por tanto, la solución del problema de Cauchy planteado anteriormente posee la solución clásica definida mediante la fórmula $u(t, x) = u(0, \xi(t, x)) = \frac{x+3t}{t+1} - 3 = \frac{x-3}{t+1}$. El dominio más amplio de definición de una función dada por esta fórmula es el conjunto $D = \{(t, x) : t \neq -1 \text{ y } x \in \mathbb{R}\}$; no obstante, en las aplicaciones nos interesarán más los puntos del semiplano $t \geq 0$, de manera que a los efectos prácticos bastará tomar como dominio de la solución un subconjunto abierto $B \subset D$ que contenga al semiplano $\{(t, x) : t \geq 0\}$. El estudiante debería comprobar que, en efecto, la función encontrada $\varphi : B \rightarrow \mathbb{R}$ satisface tanto a la ecuación de Burguers como a la condición inicial impuesta en el problema de Cauchy.

En este ejemplo sencillo se observa que, no obstante el dominio de la ecuación de Burguers ser todo el plano $\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_x$, la solución del problema de Cauchy puede obtenerse solo localmente, todo lo más en un abierto suficientemente grande que no necesariamente coincide con todo el plano.

Pero hay otro problema con el cual nos podemos tropezar al utilizar el método de las características. En efecto, las proyecciones de las características de la ecuación de Burguers sobre el plano $\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_x$ son líneas rectas que pueden intersectarse en algún punto del semiplano $t > 0$. En tal caso, al intentar definir el valr de la solución u en un punto en el cual se cortan dos características diferentes, habría que considerar "soluciones bivaluadas". En este caso la posibilidad de que se intersequen las proyecciones delas características sobre el plano $\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_x$ ocurre para $t < 0$, ya que precisamente para $t = -1$ la derivada $\frac{\partial x}{\partial \xi}$ es nula y en ese caso no resulta posible despejar la variable ξ como función de t y x .

3. SOLUCIONES SINGULARES DE LAS LEYES DE CONSERVACIÓN.

Hasta aquí nos han interesado solamente las soluciones clásicas de estas ecuaciones y sistemas, que son las funciones que tienen todas las propiedades de diferenciabilidad que hacen posible su sustitución en las ecuaciones dadas. Sin embargo, como veremos en los ejemplos siguientes, es muy frecuente la aparición de situaciones en que hace falta dar sentido a "**soluciones**" que no cumplan estas condiciones, por ejemplo, que siendo continuas no tuvieran siempre las derivadas parciales continuas o, incluso, que fueran funciones con discontinuidades de salto (como es el caso en las ondas de choque). La necesidad de incluir esos casos en la teoría de las ecuaciones diferenciales hizo necesaria la ampliación del concepto de solución y así fue necesario introducir las soluciones llamadas **singulares** y en relación con esto el concepto de **solución generalizada o solución débil**.

En las aplicaciones de las ecuaciones diferenciales en derivadas parciales con frecuencia suelen plantearse problemas en los que se necesita considerar un concepto de solución más general que el concepto clásico, en el cual se admita la existencia de singularidades en la solución. Naturalmente, esto requiere un replanteamiento mismo de la ecuación, para lo cual suelen utilizarse las formulaciones de carácter integral que preceden a la deducción de la ecuación diferencial (que aparece a partir de la suposición de que las funciones que serán sus soluciones sean derivables, con derivadas continuas, el número requerido de veces; en el caso que nos ocupa, funciones de la clase C^1 precisamente).

Por cierto, es interesante notar que aún en el caso de una ecuación tan sencilla como la de Burguers, las soluciones singulares pueden aparecer aún cuando la condición inicial propuesta en el problema de Cauchy sea una función suave. En efecto, si definimos sobre el plano $t = 0$ la condición inicial $u(0, x) = \varphi_0(x)$, donde $\varphi_0 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, entonces su gráfico es una curva suave en el plano $\mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_u$.

En ese mismo plano podemos considerar el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias

$$\begin{cases} \frac{dx}{ds} = u; \\ \frac{du}{ds} = 0, \end{cases} \quad (3.1)$$

y para cada $(x_0, u_0) \in \mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_u$ denotamos por $g^s(x_0, u_0) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_u$ la solución de dicho sistema que satisface la condición inicial $g^0(x_0, u_0) = (x_0, u_0)$. Obtenemos así una aplicación de clase C^∞ de la recta en el plano $\mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_u$. Resulta que para cada valor fijo del parámetro $s \in \mathbb{R}$, la correspondencia que a cada punto $(x_0, u_0) \in \mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_u$ asigna el correspondiente valor de la solución del sistema dado anteriormente para el valor prefijado del parámetro s , o sea, $g^s(x_0, u_0)$ es una transformación biyectiva y suave de todo el plano $\mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_u$ sobre sí mismo. La familia de estas transformaciones $(g^s)_{s \in \mathbb{R}}$ depende suavemente del parámetro s y satisface las condiciones

$$1) g^s \circ g^r = g^{s+r}, \text{ para todo } (s, r) \in \mathbb{R}^2;$$

$$2) g^0 = id_{\mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_u}.$$

Estas propiedades hacen de la familia de transformaciones $(g^s)_{s \in \mathbb{R}}$ un grupo uniparamétrico de difeomorfismos. Las transformaciones de esta familia llevan a cada punto del plano (x_0, u_0) , cuando s recorre la recta, en la curva de fases del sistema que satisface la condición inicial $g^0(x_0, u_0) = (x_0, u_0)$.

Para cada $s \in \mathbb{R}$, el difeomorfismo $g^s : \mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_u \rightarrow \mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_u$ transforma la curva suave $C_0 = \{(x, u) \in \mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_u : u = \varphi_0(x)\}$ en una curva suave $g^s(C)$. Al variar el parámetro s las curvas $g^s(C)$ van describiendo en el espacio tridimensional $\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_u$ una superficie que es la gráfica de la solución de la ecuación de Burguers, siempre que esta superficie se proyecte difeomórficamente sobre el plano $\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_x$ (en caso contrario, no podría corresponder al gráfico de una función $u(t, x)$ que satisfaga dicha ecuación). Sin embargo, cuando s varía, puede alcanzarse un punto s_0 a partir del cual las curvas $g^s(C)$ no se proyecten difeomórficamente sobre el plano $\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_x$, dando lugar así a la aparición de "**soluciones bivaluadas**" que únicamente pueden interpretarse como la aparición de "**ondas de choque**" en el sistema (o sea, soluciones singulares que a partir del punto $t = s_0$ presentan un salto a lo largo de cierta curva en el plano $\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_x$).

Esto se comprende desde otro punto de vista cuando encontramos que las proyecciones de las características sobre el plano $\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_x$ comienzan a intersectarse a partir de cierto punto.

Analicemos nuevamente el ejemplo que dimos anteriormente, consistente en hallar la solución del problema de Cauchy para la ecuación de Burguers $u_t + u.u_x = 0$ con la condición inicial $u(0, x) = \varphi_0(x) = x - 3$, cuya solución es la función $\varphi : B \rightarrow \mathbb{R}$, definida mediante la fórmula $\varphi(t, x) = \frac{x-3}{t+1}$.

El grupo uniparamétrico de difeomorfismos $g^s : \mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_x \rightarrow \mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_x$ correspondiente al sistema de ecuaciones diferenciales (3.1) es, en este caso, realmente, un grupo uniparamétrico de transformaciones lineales, definido por la matriz $g^s = \begin{pmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. La curva inicial en este ejemplo es una línea recta, que denotaremos $C = \{(x, x-3); x \in \mathbb{R}\}$ y por tanto su imagen por cada transformación lineal g^s también será una línea recta. La imagen $g^s(C) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ x-3 \end{pmatrix}; x \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} (1+s)x-3 \\ x-3 \end{pmatrix}; x \in \mathbb{R} \right\}$ será perpendicular al plano t, x cuando el vector tangente a dicha curva sea paralelo al vector $\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Pero $\frac{d}{dx} \begin{pmatrix} (1+s)x-3 \\ x-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+s \\ 1 \end{pmatrix}$, por tanto eso tiene lugar cuando el parámetro s sea igual a -1 , lo cual concuerda con nuestros cálculos previos. Como ese valor corresponde a un valor de t que está en el semiplano $t < 0$, realmente no tiene mayores consecuencias con respecto a nuestro problema porque la solución encontrada está definida en el semiplano $t \geq 0$.

Notemos que aún cuando la condición inicial sea suave, puede ocurrir que las proyecciones de las características se intersequen en el plano t, x . Esto se debe a que el grupo uniparamétrico de difeomorfismos $(g^s)_{s \in \mathbb{R}}$ de la proyección del

sistema de ecuaciones diferenciales de las características sobre el plano $\mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_u$ depende suavemente de s y para cada valor fijo de dicho parámetro transforma la curva inicial C en una curva suave $g^s(C)$, que puede proyectarse mal sobre el plano t, x (ya que el vector tangente a la curva puede llegar a ser perpendicular a dicho plano, en cuyo caso la superficie generada por la variación de la curva inicial bajo la acción de la familia de difeomorfismos $(g^s)_{s \in \mathbb{R}}$ dejaría de ser el gráfico de una función clásica, dando lugar a la aparición de "funciones bivaluadas").

Para ilustrar esto examinamos el siguiente ejemplo, en el que proponemos la condición inicial $u(0, x) = x^2$ para la ecuación de Burguers. Debemos despejar el valor de ξ en función de t, x a partir de la ecuación $x = \xi + t\xi^2$ y entonces obtenemos la solución poniendo $u(t, x) = u(0, \xi) = \xi^2$. Para que sea posible realizar dicho despeje, es necesario que se cumpla que $\frac{\partial x}{\partial \xi} = 1 + 2t\xi$ sea distinto de cero.

En este caso, como antes, el grupo uniparamétrico de transformaciones lineales está definido mediante las matrices $g^s = \begin{pmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$,

que al actuar para cada s fijo sobre la curva $C = \{(x, u) : u = x^2\}$ nos da la curva $g^s(C) = \{(x + sx^2, x^2)\}$, cuyo vector tangente en cada punto es $\vec{v} = (1 + 2sx)\vec{e}_x + 2x\vec{e}_u$ y por tanto la superficie engendrada por el movimiento de la curva $g^s(C)$ dejará de proyectarse sobre el plano (t, x) en el punto donde dicho vector sea perpendicular al plano, o sea, cuando sea $1 + 2sx = 0$ y $2x = 0$. O sea, precisamente cuando no se pueda despejar ξ en función de t, x .

Se deja al estudiante el cálculo de la solución local de la solución del problema de Cauchy que satisface la condición planteada.

Esta situación se obvia cuando generalizamos el concepto de solución e introducimos la posibilidad de tener soluciones singulares, o sea, funciones que no satisfacen en todos los puntos las condiciones de derivabilidad que harían posible su sustitución en las ecuaciones del sistema dado, pero que en cambio responden a los requerimientos de la práctica porque modelan convenientemente determinadas situaciones.

4. PROPAGACIÓN DE LAS SINGULARIDADES EN LAS LEYES DE CONSERVACIÓN.

Mostraremos el comportamiento de las soluciones singulares en las leyes de conservación lineales a través del siguiente

Ejemplo 4.1.

Comenzaremos con un ejemplo sencillo, la ecuación lineal de advección $\frac{\partial u}{\partial t} + b\frac{\partial u}{\partial x} = 0$, en la que b es una constante no nula. La ecuación puede considerarse definida en todo el plano $\mathbb{R}_{(t,x)}^2$, aunque desde el punto de vista físico nos interesarán mayormente las soluciones que están definidas para todo $t \geq 0$, ya que la variable t designa el tiempo. Se comprueba fácilmente que la solución general de esta ecuación presenta la forma $u(t, x) = \Phi(x - bt)$, donde Φ denota a una función continuamente diferenciable arbitraria definida en la recta.

Supongamos que el problema de Cauchy para la ecuación lineal de advección

se plantea sobre la recta $t = 0$ con la condición inicial

$$u(x, 0) = \frac{1}{x}, \text{ para } x \neq 0; u(0, 0) = 0.$$

Podemos encontrar la "solución" correspondiente usando la misma fórmula de la solución general, formalmente, y encontramos que para ello sería necesario tomar en lugar de la función Φ una función de x definida como la función inicial, o sea, $\Phi(x) = \frac{1}{x}$, para $x \neq 0$; $\Phi(0) = 0$. En consecuencia, la solución de este problema será la función

$$u(t, x) = \frac{1}{x-bt}, \text{ si } x - bt \neq 0; u(t, x) = 0, \text{ si } x - bt = 0.$$

Vemos entonces que la "solución" obtenida satisface a la ecuación lineal de advección en todo el plano con excepción de la recta $x - bt = 0$ (regiones en las cuales está actuando en realidad como solución clásica), y presenta una singularidad del mismo tipo que la de la función inicial, que se propaga a lo largo de dicha recta (que es, por cierto, una de las curvas características de la ecuación de advección).

Ejercicio 4.2

Considere nuevamente la ecuación lineal de advección $\frac{\partial u}{\partial t} + b\frac{\partial u}{\partial x} = 0$ con la condición inicial $u(x, 0) = u_0(x)$, donde $u_0 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función integrable. Demostrar que la "solución" $u(x, t) = u_0(x - bt)$ satisface la ley de conservación en su forma integral:

$$\int_{x_1}^{x_2} u(x, t_2) dx - \int_{x_1}^{x_2} u(x, t_1) dx = \int_{t_1}^{t_2} b(u(x_1, t)) dt - \int_{t_1}^{t_2} b(u(x_2, t)) dt, \forall x_1, x_2, t_1, t_2.$$

Este ejemplo sencillo nos ilustra una situación que se cumple, en general, en toda ley de conservación lineal (y para las ecuaciones lineales en derivadas parciales de primer orden, en general):

Si para una ecuación lineal en derivadas parciales de primer orden se plantea el problema de Cauchy con una función inicial que no sea continuamente diferenciable (que, por ejemplo, sea discontinua, o que siendo continua tenga alguna discontinuidad en las derivadas), entonces la "solución" correspondiente tendrá singularidades del mismo tipo que se transportan en el tiempo a lo largo de curvas características de la ecuación original.

En el caso de las ecuaciones cuasilineales y no lineales, el comportamiento de las soluciones singulares y la propagación de las singularidades es completamente diferente al caso de una ley de conservación lineal.

Para dar una idea de lo que ocurre en este caso, presentaremos varios ejemplos asociados con las ecuaciones cuasilineales de la forma

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (f(u)) = 0, t > 0, \quad (4.1)$$

en la que f denota una función de clase C^2 definida en la recta \mathbb{R}_x^1 .

Como ya hemos dicho anteriormente, a esta clase de ecuaciones pertenece la ecuación de Euler-Hopf, la cual se obtiene cuando $f(u) = \frac{1}{2}u^2$.

La ecuación (1) se puede escribir en la forma

$$\frac{\partial u}{\partial t} + b(u)\frac{\partial u}{\partial x} = 0, t > 0, \text{ donde } b(u) = f'(u). \quad (4.2)$$

Ecuaciones de esta clase aparecen en el estudio de fenomenos ondulatorios (no disipativos) no lineales, de los cuales hemos mostrado en la introducción de esta sección el ejemplo de la dinámica gaseosa (particularmente, la conservación de la masa gaseosa en el problema de la propagación de un gas a través de un tubo). La ecuación (4.1) (o bien, la (4.2)) expresa una ley de conservación del estado representado por la función $u = u(t, x)$.

Un ejemplo de sistema de este tipo es el que dimos anteriormente, al considerar el problema de la propagación de un gas en un tubo, en el cual se consideran tres magnitudes (la densidad ρ , el momentum ρv y la energía E) que se conservan en la dinámica gaseosa.

Consideremos nuevamente la ecuación (4.1) en su versión (4.2), o sea, $\frac{\partial u}{\partial t} + b(u)\frac{\partial u}{\partial x} = 0, t > 0$. Entonces el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de sus curvas características es

$$\begin{cases} \frac{dt}{ds} = 1; \\ \frac{dx}{ds} = b(u); \\ \frac{du}{ds} = 0. \end{cases} \quad (4.3)$$

Este método se puede utilizar aún en el caso en que la función inicial no sea al menos continuamente derivable.

Por cierto, aplicando este "**método de las características**" podemos comprender que si nos interesa encontrar soluciones clásicas globales (o sea, que estén definidas para todos los valores de $x \in \mathbb{R}^1$ y todos los $t > 0$) podemos no ser capaces de hacerlo pues nos veríamos obligados a considerar soluciones "**multivaluadas**".

En efecto, supongamos que dos características $C_{u_0(\xi_1)}$ y $C_{u_0(\xi_2)}$, situadas en hiperplanos distintos $u = u_0(\xi_1)$ y $u = u_0(\xi_2)$, se proyectan en dos rectas distintas que se intersecan en un punto (t, x) del plano $\mathbb{R}_t^1 \times \mathbb{R}_x^1$, y pasan por los puntos $(0, \xi_1)$ y $(0, \xi_2)$. Esto significa que $x = \xi_1 + b(u_0(\xi_1))t = \xi_2 + b(u_0(\xi_2))t$, de donde se obtiene una expresión del valor de t en dependencia de u_0, ξ_1 y ξ_2 : $t = -\frac{\xi_2 - \xi_1}{b(u_0(\xi_2)) - b(u_0(\xi_1))}$. Por consiguiente si existe un valor positivo T que satisfaga la relación anterior para dos valores diferentes ξ_1 y ξ_2 , entonces no se puede obtener una solución clásica del problema de Cauchy que esté definida en el punto (T, x) , pues en ese caso dicha solución tendría que ser una función bivaluada (y por tanto dejaría de ser una solución clásica, la cual tiene que ser, por definición, una función $u : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de clase C^1 que satisfaga la ecuación). Por otra parte, si $b(u_0(\xi_2)) \neq b(u_0(\xi_1))$, una solución global tendría necesariamente una discontinuidad en el punto (T, x) , ya que si $t \rightarrow T^-$ sobre la recta $x = \xi_1 + b(u_0(\xi_1))t$, entonces la solución debería tender a $u_0(\xi_1)$, mientras que si $t \rightarrow T^-$ sobre la recta $x = \xi_2 + b(u_0(\xi_2))t$, entonces la solución tendería a $u_0(\xi_2) \neq u_0(\xi_1)$. Por consiguiente, en esos casos no hay otra manera de obtener soluciones globales sino admitiendo un concepto generalizado de solución que nos permita concebir soluciones que tengan puntos singulares (o sea, soluciones "**singulares**" o "**generalizadas**". Con toda probabilidad, esa circunstancia nos pone en peligro de perder algunas de las propiedades que hemos visto que suelen poseer las soluciones clásicas de problemas típicos como el de valores iniciales (en particular, la unicidad de dichas soluciones).

Para definir estas "**soluciones generalizadas**" introduciremos un concepto menos restrictivo de solución, apelando para ello a la "**forma integral de la ley de conservación**".

Primera definición de solución débil de una ley de conservación escalar.

Se dice que una función integrable $u(t, x)$, definida en un abierto que contiene al semiplano $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^1$, una solución débil de la ecuación $\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(f(u)) = 0$ si la identidad integral que sigue a continuación se cumple en todo rectángulo $[t_1, t_2] \times [x_1, x_2]$, donde $[t_1, t_2] \subset \mathbb{R}_+$:

$$\int_{x_1}^{x_2} u(x, t_2) dx - \int_{x_1}^{x_2} u(x, t_1) dx = \int_{t_1}^{t_2} f(u(x_1, t)) dt - \int_{t_1}^{t_2} f(u(x_2, t)) dt, \forall x_1, x_2, t_1, t_2.$$

Otro enfoque de este concepto que en ocasiones resulta más conveniente se define con la ayuda de las llamadas "**funciones de prueba**". En este contexto las funciones de prueba serán las funciones continuamente diferenciables de soporte compacto, cuyo conjunto se denota por $C_o^1(\mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^1)$. Una función continuamente diferenciable $\varphi : \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}$ se dice que tiene soporte compacto si la clausura el conjunto $\{(t, x) \in \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^1 : \varphi(x, t) \neq 0\}$ es compacta. En otras palabras: $C_o^1(\mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^1) = \{\varphi : \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R} : \varphi \text{ es de clase } C^1 \text{ y tiene soporte compacto}\}$.

En este enfoque, a fin de obtener una "**ley de conservación integral**" se multiplica la ecuación en derivadas parciales por una función de prueba, se integra sobre algún dominio y entonces, aplicando la integración por partes, se trata de desplazar la derivación de la función incógnita hacia la función de prueba en las equivalencias obtenidas en el proceso de integración. Mediante este procedimiento se obtiene una ecuación integral que incluye menos derivadas de la incógnita u y por tanto no requiere de la suavidad de dicha función para que sea verificada.

Aplicemos esta idea a la ecuación (4.2). Multiplicando ambos miembros de dicha ecuación por una función de prueba arbitraria $\varphi \in C_o^1(\mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^1)$ e integrando, obtenemos la identidad:

$$\int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\varphi \frac{\partial u}{\partial t} + \varphi \frac{\partial}{\partial x}(b(u)) \right] dt dx = 0.$$

Ahora, separando las integrales en el primer miembro e integrando por partes, se obtiene:

$$\begin{aligned} & \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi \frac{\partial u}{\partial t} dx dt + \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi \frac{\partial}{\partial x}(b(u)) dt dx = \\ & = \int_{-\infty}^{+\infty} \left([\varphi u]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} \frac{\partial \varphi}{\partial t} u dt \right) dx + \int_0^{+\infty} \left([\varphi b(u)]_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial \varphi}{\partial t} b(u) dx \right) dt = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x, 0)u(x, 0)dx - \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial \varphi}{\partial t} u dx dt + \\
 &+ \varphi(+\infty, t)b(u) - \varphi(-\infty, t)b(u) - \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial \varphi}{\partial x} b(u) dx dt = \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x, 0)u(x, 0)dx - \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial \varphi}{\partial t} u dx dt - \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial \varphi}{\partial x} b(u) dx dt = 0.
 \end{aligned}$$

En consecuencia, obtenemos la identidad integral

$$\int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial \varphi}{\partial t} u dx dt + \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial \varphi}{\partial x} b(u) dx dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x, 0)u(x, 0)dx. \quad (4.4)$$

Ahora estamos en condiciones de dar la

Segunda definición de solución débil de una ley de conservación escalar.

Una función integrable $u(t, x)$ se dice que es una solución débil de la ley de conservación (4.2) si y solamente si la identidad (4.4) se verifica para todas las funciones de prueba $\varphi \in C_0^1(\mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}_+^1)$.

Ejemplo 4.2.

Hallemos una solución de la ecuación de Euler $\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0$, con la condición inicial $u(0, x) = u_0(x) = \left\{ \begin{array}{l} 1, x < 0; \\ 1 - x, 0 \leq x \leq 1; \\ 0, x > 1. \end{array} \right\}$.

Las proyecciones de las características sobre el plano (t, x) son las rectas $x = u_0(\xi)t + \xi, \forall \xi \in \mathbb{R}$.

Por consiguiente, si $\xi < 0$, entonces $u_0(\xi) = 1$ y por tanto en ese caso $x = t + \xi$.

Por otra parte, si $0 \leq \xi \leq 1$, entonces $x = (1 - \xi)t + \xi$. Finalmente, si $\xi > 1$, entonces $x = \xi$.

Vemos que estas proyecciones se intersecan para $t \geq 1$.

En correspondencia con las expresiones obtenidas, la solución se puede expresar de la manera que sigue:

$$u(t, x) = u_0(\xi(t, x)) = \left\{ \begin{array}{l} u_0(x - t) = 1, x - t < 0; \\ u_0(\frac{x-t}{1-t}) = 1 - \frac{x-t}{1-t}, 0 \leq x - t \leq 1; \\ u_0(x) = 0, t < 1 \leq x. \end{array} \right\}$$

Finalmente, obtenemos

$$u(t, x) = \left\{ \begin{array}{l} 1, x < t < 1; \\ \frac{1-x}{1-t}, t \leq x < 1; \\ 0, t < 1 \leq x. \end{array} \right\}.$$

Observe que la función obtenida no es una solución clásica, ya que $u \notin C^1((0, 1) \times \mathbb{R})$, pues sus derivadas parciales no están definidas sobre los segmentos de recta $\{(t, t); 0 \leq t < 1\}$ y $\{(1, t); 0 \leq t < 1\}$. Sin embargo, $u \in C([0, 1) \times \mathbb{R})$ y también satisface la condición inicial propuesta.

Ejercicio 4.2.

Demuestre que esta función satisface las dos definiciones dadas anteriormente del concepto de solución débil.

A continuación daremos un ejemplo que muestra que puede existir una solución débil que sea continua (no derivable) para $t > 0$, aunque la función inicial sea discontinua. Por tanto, en una ecuación no lineal la discontinuidad de la condición inicial puede no ser propagada a través de las proyecciones de las características.

Ejemplo 4.3.

Una vez más consideramos la ecuación de Euler $\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0$, pero ahora se impone la condición inicial discontinua $u(0, x) = u_0(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ 1, & x \geq 0. \end{cases}$. Un problema de este tipo se conoce en la literatura científica como el "**problema de Riemann**".

Las proyecciones de las características sobre el plano (t, x) en este caso satisfacen las ecuaciones $x = \xi$, para $\xi < 0$; $x = t + \xi$, para $\xi \geq 0$.

En consecuencia, las proyecciones de las características no se intersecan (para $t > 0$). Aún más, en el semiplano $t > 0$ queda un ángulo en el cual no está contenida ninguna proyección. Esto nos da la posibilidad de construir una solución continua del problema de Riemann. En la zona donde las proyecciones de las características son las rectas $x = \xi$ (donde ξ es una constante menor que 0) podemos definir la función $u(t, x)$ mediante la fórmula $u(t, x) = 0$; en la zona donde las proyecciones son las rectas $x = t + \xi$, podemos definirla como $u(t, x) = 1$. Nos queda el ángulo formado por los puntos donde no se proyecta ninguna de las características, definimos la función $u(t, x)$ mediante la fórmula $u(t, x) = \frac{x}{t}$, donde $0 \leq \frac{x}{t} \leq 1, t \neq 0$. En resumen, resulta así definida una función continua sobre todo el semiplano $t \geq 0$ (exceptuando el punto $(0, 0)$), que satisface la ecuación de Euler fuera de las proyecciones de las características que pasan por el punto $(0, 0)$ y también la condición inicial propuesta,

$$u(t, x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < 0, t \geq 0; \\ \frac{x}{t}, & \text{si } 0 \leq x \leq t, t \neq 0; \\ 1, & \text{si } x > t \geq 0. \end{cases}$$

Notemos, sin embargo, que esta "solución" no satisface los requisitos de una solución clásica, pues aunque la función así construida sea continua, sin embargo no tiene derivada continua en todos los puntos de su dominio de definición. Una solución de esta clase recibe el nombre de "**onda de rarefacción**".

Este ejemplo muestra que podemos tener una "solución" continua para $t > 0$ aunque la condición inicial sea discontinua. Esto significa que la discontinuidad de la función inicial no necesariamente se propaga en la solución del problema. En este caso las derivadas de la solución son discontinuas a lo largo de las proyecciones de las características que pasan por el origen. En consecuencia, se trata de un fenómeno que solamente tiene lugar en las ecuaciones no lineales o cuasi lineales, como la de Euler.

Observación 4.1.

Notemos que en el ejemplo 1 no es posible hallar una solución clásica global (o sea, definida para todo $t > 0$) que sea continua en el punto $(1, 1)$. En efecto, $u = 1$ en la región $x < t < 1$ y $u = 0$ en la región $t < 1 < x$; además, sería imposible definir unívocamente la solución en la región del plano en la cual las proyecciones de las características se intersecan.

Esta situación es típica en las ecuaciones del tipo de la de Euler, donde (como ya hemos mostrado anteriormente) puede suceder que las proyecciones de las características sobre el plano se intersequen.

Ejemplo 4.4

Podemos dar una solución global generalizada para el problema de Cauchy planteado en el **ejemplo 4.2** si admitimos que la función $u(t, x)$ sea discontinua a lo largo de una curva que parta del punto $(1, 1)$, que es el correspondiente al menor valor de t a partir del cual las proyecciones de las características correspondientes al problema dado, comienzan a intersecarse. Resulta fácil considerar una tal curva (puede ser la misma recta $x = t$, o cualquier otra semirrecta o curva suave que esté contenida en el ángulo formado por las semirrectas $\{(t, x) : x = 1, t \geq 1\}$ y $\{(x, t) : t = 1, x \geq 1\}$). Esto nos sugiere la posibilidad de encontrar infinitas soluciones generalizadas diferentes del problema de Cauchy. ¿Cuál de ellas tendrá un sentido físico? Para definir eso será necesario considerar otros factores que dependen de la naturaleza del problema, que deberán ser tomados en cuenta para escoger la solución más adecuada. Por ejemplo, se utiliza mucho en las aplicaciones una condición llamada de "**entropía**". que no formularemos en este momento.

La fórmulas para la definición de la nueva solución serán las mismas, solamente cambia el dominio de su definición:

$$u_1(t, x) = \left\{ \begin{array}{l} 1, x < t, t > 0; \\ \frac{1-x}{1-t}, t \leq x < 1; \\ 0, t < 1 \leq x \text{ o } t \geq x \geq 1. \end{array} \right\}$$

Una solución de este tipo recibe el nombre de "onda de choque". En general se tiene la siguiente

Definición. Una solución generalizada $u(t, x)$ de una ecuación en derivadas parciales de primer orden recibe el nombre de onda de choque, cuando existe un valor $t_0 > 0$ y una curva parametrizada $x = g(t), t \geq t_0$, tal que la función $u(t, x)$ sea discontinua a lo largo de dicha curva y satisfaga la ecuación diferencial (como solución clásica) fuera de dicha curva.

Observación 4.2. Si la función $b(u_0(x))$ es monótona no decreciente, entonces las proyecciones de las características sobre el plano (t, x) nunca se encontrarán ya que en ese caso se tendría $\xi_1 < \xi_2 \Rightarrow b(u_0(\xi_1)) \leq b(u_0(\xi_2))$ y por tanto la fracción $-\frac{\xi_2 - \xi_1}{b(u_0(\xi_2)) - b(u_0(\xi_1))}$ nunca podría ser positiva. Desde el punto de vista, esto significa que $b(u_0(x))$ tiene derivada mayor o igual que cero para todo x y por tanto las ecuaciones $u = u_0(\xi)$ y $x = b(u_0(\xi))t + \xi$ determinan una solución clásica para todo $t > 0$.

Observación 4.3. Note que una onda de choque puede aparecer aunque la función inicial $u_0(x)$ sea suave. Por ejemplo, ello ocurrirá cada vez que la función $b(u_0(x))$ sea de soporte compacto.

En tal situación las proyecciones de las características sobre el plano (t, x) comenzarán a intersectarse a partir de un valor positivo de t , y podrían construirse soluciones generalizadas globales discontinuas del problema de Cauchy de la misma manera que lo hicimos en el **ejemplo 4.4**.

En general, la aparición de ondas de choque a partir de funciones iniciales suaves se explica también por el hecho de que el flujo de fases $g^s: (x_0, u_0) \rightarrow g(s, x_0, u_0)$ del sistema dinámico $\frac{dx}{ds} = b(u)$, $\frac{du}{ds} = 0$ (proyección sobre el plano (x, u) del sistema de ecuaciones diferenciales de las curvas características de la ecuación cuasilineal $\frac{\partial u}{\partial t} + b(u)\frac{\partial u}{\partial x} = 0$) al actuar sobre el gráfico de la función inicial $u = u_0(x)$ puede irlo deformando continuamente hasta que deje de proyectarse difeomórficamente sobre el eje de las x , hecho que comienza a ocurrir precisamente en el momento en que las correspondientes rectas características se proyectan sobre el plano (t, x) en rectas que se intersectan a partir de un valor de t .

Ejercicio 4.2

Mostrar que las soluciones singulares que hemos presentado en estos ejemplos son, en realidad, soluciones generalizadas en el sentido de las definiciones dadas anteriormente.

5. DIFICULTADES TEÓRICAS Y NUMÉRICAS QUE PLANTEA LA RESOLUCIÓN DE LAS ECUACIONES DE LAS LEYES DE CONSERVACIÓN.

Para concluir esta parte introductoria de nuestro cursillo, es conveniente enumerar algunas de las dificultades que suelen presentarse cuando se intenta resolver las ecuaciones de las leyes de conservación, con el objetivo de utilizar los resultados en las aplicaciones a otras ramas del conocimiento y la tecnología.

En primer lugar conviene destacar que fue necesario dar un sentido más amplio al concepto de solución, sobre todo por el hecho de que las soluciones singulares pueden tener una gran importancia en las aplicaciones.

En segundo lugar, la generalización del concepto de solución implica la posibilidad de que varias soluciones satisfagan las mismas condiciones iniciales, por tanto se hace necesario investigar las condiciones que hace falta imponer para seleccionar aquellas soluciones que tengan una validez desde el punto de vista físico. Ese es el papel que juegan, por ejemplo, las condiciones de entropía que han introducido algunos autores con ese objetivo.

En tercer lugar, la invención de la teoría de las distribuciones de Laurent Schwartz permitió resolver con éxito la mayoría de los **problemas lineales** que se estudian con la ayuda de ecuaciones diferenciales tanto ordinarias como parciales. Muchas distribuciones clásicas, tales como la función δ de Dirac y, la función H de Heaviside, por no citar más que los ejemplos más notables, resultan inaplicables en los **problemas no lineales** dada la imposibilidad,

PROFESSOR DR. BALDOMERO VALIÑO ALONSO, UNIVERSIDAD DE LA HABANA, CUBA.

demostrada por el mismo Lauren Schwartz, de realizar multiplicaciones y otras operaciones no lineales con dichas distribuciones. En la próxima conferencia nos dedicaremos a introducir las nociones más elementales de dicha teoría, a fin de que se comprenda la esencia de esta dificultad fundamental.

En cuarto lugar, y no por ello menos importante, hay que destacar que la resolución numérica de estas ecuaciones suele presentar dificultades adicionales. Una discretización mediante diferencias finitas resulta inaplicable debido a la presencia de singularidades en las soluciones. No obstante, han sido elaborados muchos **métodos numéricos** especialmente concebidos para obviar estas dificultades (por ejemplo, los llamados esquemas de Godounov), pero su implementación requiere un estudio detallado de tales métodos a fin de aplicarlos correctamente.

Al final de nuestras conferencias será posible agregar a esos métodos, uno que ha sido sugerido por Víctor Pávlovich Máslov y que consiste en el truncamiento de la cadena de ecuaciones diferenciales ordinarias que deben satisfacer los coeficientes de la expresión asintótica formal de las soluciones singulares. Esto abre nuevas posibilidades para la aplicación exitosa de las **funciones generalizadas según Jean François Colombeau**, lo cual pretendemos mostrar en las próximas conferencias de este curso y constituye el objetivo fundamental de este ciclo de conferencias.

LITERATURA.

- [1] Vladimir Ígorievich Arnold, "Obuiknoviennie Differentsialnie Uravnienia" ("Ecuaciones Diferenciales Ordinarias"), Mosckva, Naúka, 1984.
- [2] Vladimir Ígorievich Arnold, "Partial Differential Equations", Springer Verlag New York-Heidelberg-Berlin, 2004.
- [3] Valeria Iorio de Magalhaes, "EDP: Un Curso de Graduação", Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, IMPA, Río de Janeiro, Brasil, 2005.
- [4] Fritz John, "Partial Differential Equations", Springer Verlag New York-Heidelberg-Berlin, Fourth Edition, 1982.
- [6] Randall J. Le Veque, "Numerical Methods of Conservation Laws", Lectures in Mathematics, ETH Zurich, Second Edition, Birkhauser Verlag, Berlin, 1992.