PROFESSOR DR. BALDOMERO VALIÑO ALONSO, UNIVERSIDAD DE LA HABANA, CUBA.

CONFERENCIA N^o 2:

NOCIONES DE LA TEORÍA DE LAS FUNCIONES GENERALIZADAS.

1. BREVE HISTORIA Y ANTECEDENTES DE LA TEORÍA DE LAS FUNCIONES GENERALIZADAS.

El concepto de función es uno de los más importantes de la matemática y su elaboración es el resultado del trabajo de muchos matemáticos a lo largo de la historia de esta ciancia. Cada rama de la ciencia (la física, la química, la biología, la lingüística, la economía, entre otras) posee sus objetos de estudio, establece las propiedades de los mismos y, lo que es singularmente importante, las relaciones que se establecen entre dichos objetos. En las distintas ciencias y en todas las ramas de la actividad humana surgen relaciones cuantitativas, y la matematica las estudia en forma de propiedades de los números. La matemática examina los cambios de las magnitudes abstractas y estudia distintas leyes de su interacción, las cuales en el lenguaje matemático se denominan **dependencias funcionales o funciones.** El concepto de función para la matemática y sus aplicaciones, relacionados con el estudio de las magnitudes variables, es tan fundamntal como el concepto de número en el estudio de las relaciones cuantitativas del mundo real. Como es sabido, en matemática se ha llegado a depurar el concepto de función como una correspondencia entre dos conjuntos A y B que a cada elemento $x \in A$ asigna (mediante alguna regla o ley determinada) un elemento $y \in B$, unívocamente determinado para cada $x \in A$. El Análisis Matemático estudió sucesivamente las propiedades de continuidad y diferenciabilidad y la integración de las funciones de variable real y compleja con valores en los conjuntos $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$, y se fueron elaborando las teorías matemáticas que permitían su aplicación en las distintas ramas de las ciencias particulares.

A finales de los años 20 del pasado siglo en el campo de la física comenzaron a denominarse **funciones** ciertos objetos que no eran propiamente reconocidas como tales por los matemáticos. El físico inglés Paul Dirac, al estudiar las singularidades cuantizadas en el campo electromagnético, fue el primero en utilizar el nombre de función para designar una corrspondencia que a cada número real $x \neq 0$ hace corresponder el número $\delta(x) = 0$, mientras que $\delta(0) = +\infty$, de tal modo que $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)\, dx = 1$. Se requirió el esfuerzo de varios matemáticos (J. Hadamard, S. Bochner y M. Riezs) y varios años de trabajo para dar una correcta definición de la función δ de Dirac, de sus derivadas y, en general, lo que se comenzó a llamar las **funciones generalizadas.** Los fundamentos de la teoría matemática de las funciones generalizadas fueron desarrollados por el matemático ruso S. L. Sobolev en 1936, quien aplicó exitosamente las funciones generalizadas en el estudio del problema de Cauchy para las ecuaciones en derivadas parciales. En los años posteriores a la II Guerra Mundial, el matemático francés L. Schwartz , apoyándose en la teoría de los espacios topológicos localmente convexos, realizó una construcción sistemática de la teoría de las funciones generalizadas e indicó una serie de importantes aplicaciones de dicha teoría. Los resultados de estas investigaciones fueron expuestos por L. Schwarzt en su conocida monografía "**Theorie des distributions**", publicada en 1951, a partir de la cual los conceptos de función generalizada y distribución comenzaron a utilizarse como sinónimos en el lenguaje matemático. Desde entonces, un amplio campo de investigación se abrió para los matemáticos y se conocieron numerosas aplicaciones en la física y en la propia matemática, llegando a penetrar los dominios de la ingeniería y las ciencias técnicas en general.

La idea de **función generalizada** tiene mucho que ver con la necesidad de introducir un concepto más amplio de solución en la teoría de las ecuaciones diferenciales, y en cierta forma la definición que dimos en la conferencia anterior de las **soluciones débiles o generalizadas** ya fue estructurada con apoyo en esa concepción. Habíamos hablado en aquella ocasión de las llamadas **"funciones de prueba" (**llamadas también "**funciones básicas"** por otros autores), las cuales, en el caso de la recta real unidimensional son las funciones de clase C^{∞} que tienen un **soporte compacto** (o sea, funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que tengan derivadas de todos los órdenes en todo punto de la recta y tales que la clausura del conjunto $\{x \in \mathbb{R} : f(x) \neq 0\}$ sea compacto, o sea, un intervalo cerrado y acotado).

El conjunto de las funciones de prueba se denota comúnmente por la notación $D(\mathbb{R})$, y claramente la adición de funciones es una ley de composición interna en dicho conjunto, mientras que el producto de una función de prueba $f \in D(\mathbb{R})$ por un escalar $\lambda \in \mathbb{R}$ es una funciòn λf que también pertenece a $D(\mathbb{R})$, por tanto la terna $(D(\mathbb{R}), +, .)$ es una estructura de espacio vectorial real. En este espacio vectorial $D(\mathbb{R})$ de las funciones de prueba se introduce una **noción de convergencia** de la manera siguiente: dada una sucesión de funciones de prueba $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y un elemento $\varphi \in D(\mathbb{R})$, se dice que $\varphi_n \to \varphi$ en $D(\mathbb{R})$ cuando $n \to \infty$, si existe un intervalo cerrado y acotado que contiene a los soportes de φ y de todas las funciones de la sucesión $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$, y además la sucesión de las derivadas $\left(\varphi_n^{(k)}\right)$ **converge uniformemente sobre dicho intervalo** a $\varphi^{(k)}$ para todo $k = 0, 1, 2, ...$ (donde en el caso $k = 0$ se interpreta $\varphi_n^{(0)} = \varphi_n$ y $\varphi^{(0)} = \varphi$.

Por tanto, $(D(\mathbb{R}), +, .)$ es en realidad un **espacio vectorial topológico** ya que se puede demostrar fácilmente que esta convergencia está inducida por una topología que está generada por un sistema finito de funciones continuas positivas $\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_m$ y un conjunto vecindades de $0 \in D(\mathbb{R})$ definidas por las relaciones $V_1 = \{\varphi \in D(\mathbb{R}) : |\varphi(x)| < \gamma_1(x)\}, V_2 = \{\varphi \in D(\mathbb{R}) : |\varphi(x)| < \gamma_2(x)\}, ..., V_m = \{\varphi \in D(\mathbb{R}) : |\varphi(x)| < \gamma_m(x)\}$.

Un buen ejercicio para el estudiante es demostrar esta afirmación, o sea, que la topología así construída en $D(\mathbb{R})$ induce la convergencia definida anteriormente.

Consideramos ahora el espacio vectorial dual de $D(\mathbb{R})$, o sea, el espacio formado por las funcionales lineales $F : D(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ (o sea, las aplicaciones lineales del espacio vectorial real $D(\mathbb{R})$ que toman sus valores en el espacio vectorial unidimensional $\mathbb{R}$).

Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función localmente integrable sobre la recta, podemos definir una funcional F sobre $D(\mathbb{R})$ poniendo

$$F(\varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\varphi(x)\,dx, \forall\varphi \in D(\mathbb{R}).$$

La aplicación así definida no es solo lineal (lo cual es una consecuencia de la linealidad de la integral), sino también **continua,** ya que si $\varphi_n \to \varphi$ en $D(\mathbb{R})$ entonces

$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\varphi_n(x)\,dx \to \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\varphi(x)\,dx$, ya que en realidad se trata de integrar sobre el intervalo compacto sobre el cual tiene lugar la convergencia uniforme de las funciones φ_n a la función φ.

No toda funcional lineal continua sobre $D(\mathbb{R})$ es del tipo definido anteriormente, las que reciben el nombre de **funcionales lineales regulares.** También se pueden definir otras funcionales lineales continuas sobre $D(\mathbb{R})$ que no pueden construirse de la misma manera, por ejemplo, las que se definen mediante la evaluación de las funciones de prueba en un punto prefijado de la recta:

$F_0(\varphi) = \varphi(0), \forall\varphi \in D(\mathbb{R})$.

O bien, más generalmente, si $a \in \mathbb{R}$ es cualquier punto prefijado de la recta, la aplicación $F_a : D(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ definida mediante la fórmula

$F_a(\varphi) = \varphi(a), \forall\varphi \in D(\mathbb{R})$.

Un ejercicio sencillo para el estudiante es demostrar que estas aplicaciones son, efectivamente, funcionales lineales y continuas sobre $D(\mathbb{R})$.

En este contexto, estamos en condiciones de definir las **funciones generalizadas** como toda clase de **funcionales lineales continuas sobre el espacio de las funciones de prueba** $D(\mathbb{R})$.

A continuación daremos las definiciones precisas para el caso de la recta real, las cuales serán generalizadas fácilmente para el caso de un abierto arbitrario Ω del espacio euclidiano $n-$dimensional $\mathbb{R}^n$.

2. LAS FUNCIONES GENERALIZADAS SOBRE LA RECTA.

Como espacio de funciones básicas consideramos el espacio vectorial topológico $D(\mathbb{R})$ de las funciones de prueba sobre la recta $\mathbb{R}^1$. Se escoge de este modo, y no un espacio más grande (por ejemplo, el espacio vectorial real $C(\mathbb{R})$ de las funciones continuas sobre la recta, lo que hubiera sido suficiente para introducir funciones generalizadas tales como la δ de Dirac), porque cuanto menor sea el conjunto de las funciones básicas, mayor será el espacio de las funciones lineales continuas definidas sobre el espacio básico y por tanto tendremos más posibilidades de construir funciones generalizadas. Tampoco seria conveniente tomar un espacio vectorial demasiado pequeño, porque necesitamos definir las funciones generalizadas de manera que sea factible su utilización en la práctica. Desde ese punto de vista, el espacio de las funciones suaves de soporte compacto sobre la recta $\mathbb{R}$ es lo suficientemente grande para que las funciones generalizadas definidas con su ayuda tengan las propiedades que hagan factible su utilización en la práctica científica y en la tecnología.

Definición (2.1).

Una **función generalizada sobre la recta** $\mathbb{R}^1=\{x : -\infty < x < +\infty\}$ es cualquier funcional lineal continua T definida sobre el espacio vectorial topológico $D(\mathbb{R})$. El conjunto de las funciones generalizadas sobre la recta, conocido también como **conjunto de las distrituciones sobre la recta** $\mathbb{R}^1$ se denota comúnmente por $D\prime(\mathbb{R})$.

Proposición 2.1

El conjunto de las funciones generalizadas o distribuciones sobre la recta $D\prime(\mathbb{R})$ es un espacio vectorial topológico sobre el campo $\mathbb{R}$ de los números reales, en el cual las operaciones de adición de distrituciones y multiplicación por escalares se definen de la manera usual (o sea, punto a punto) y la topología viene dada por la convergencia definida del modo siguiente: Se dice que una sucesión de distribuciones $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tiende a una distribución T en $D\prime(\mathbb{R})$ si y solamente si $T_n(\varphi)$ tiende a $T(\varphi)$ en el espacio de las funciones de prueba $D(\mathbb{R})$. Esta convergencia en el espacio de las funciones generalizadas se denomina **convergencia débil.**

Ejemplos de distribuciones sobre la recta $\mathbb{R}$.

1. El primer ejemplo que daremos es la **función δ de Dirac**, la cual se define de la manera siguiente:

$\delta(\varphi) = \varphi(0)$, cualquiera que sea la función de prueba $\varphi \in D(\mathbb{R})$.

Para denotar la función δ de Dirac, también se usa la notación

$$\delta(\varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)\,\varphi(x)\,dx$$

lo cual se justifica sobre todo por la interpretación y el hábito adquirido por los físicos en su utilización.

Esta funcional lineal es obviamente continua, ya que si la sucesión de funciones de prueba $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tiende a una función $\varphi \in D(\mathbb{R})$, entonces $\delta(\varphi_n)$ tiende a $\delta(\varphi)$, ya que en este caso $\delta(\varphi_n) = \varphi_n(0)$ tiende a $\delta(\varphi) = \varphi(0)$.

2. También se utiliza mucho la **función δ de Dirac desplazada,** que se denota por δ_a y se define mediante la regla $\delta_a(\varphi) = \varphi(a), \forall\varphi \in D(\mathbb{R})$. En ese caso es lógico utilizar la notación

$$\delta_a(\varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x-a)\,\varphi(x)\,dx.$$

Se debe notar que ni en este ejemplo, ni en el anterior, se trata de funciones generalizadas **regulares,** ya que las integrales escritas anteriormente para denotarlas no tienen significado alguno y son meras notaciones. Sin embargo, la demostración de esta afirmación queda fuera de los objetivos del presente cursillo. Tales funciones generalizadas no regulares se denominan **distribuciones singulares.**

3. En cambio, si f es cualquier función localmente integrable sobre la recta

$\mathbb{R}^1$ (o sea, si $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$) entonces ya hemos visto que se puede construir una distribución $F \in D\prime(\mathbb{R})$ poniendo $F(\varphi) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi(x)\,dx, \forall\varphi \in D(\mathbb{R})$.

Un buen ejercicio para el estudiante es comprobar que, en efecto, esta funcional lineal sobre el espacio vcetorial $D(\mathbb{R})$ es también continua y por tanto se trata de una distribución sobre la recta.

Por cierto, la aplicación $\Phi : L^1_{loc}(\mathbb{R}) \to D'(\mathbb{R})$ que a cada función localmente integrable $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ hace corresponder la función generalizada o distribución $F \in D'(\mathbb{R})$ definida anteriormente, es una aplicación inyectiva, lo que nos permite identificar a cada función localmente integrable sobre la recta con la distribución que ella define.

En efecto, supongamos que f_1 y f_2 son dos funciones distintas localmente integrables sobre la recta. Esto significa que existe un punto $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $f_1(x_0) \neq f_2(x_0)$, por tanto la función $f = f_1 - f_2$ también pertenece a $L^1_{loc}(\mathbb{R})$ y es no nula en x_0, por consiguiente existe un intervalo (α, β) que contiene a dicho punto donde $f(x) \neq 0, \forall x \in (\alpha, \beta)$.

Construyamos ahora una función $\varphi \in D(\mathbb{R})$ que se anule fuera de este mismo intervalo (α, β), poniendo

$$\varphi_0(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{(x-\alpha)^2}} . e^{-\frac{1}{(x-\beta)^2}}, \text{si } x \in (\alpha, \beta); \\ 0, \text{ si } x \notin (\alpha, \beta). \end{cases}$$

Un ejercicio sencillo para el estudiante es comprobar que la función $\varphi_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ así definida es de clase C^∞ y tiene soporte compacto (en particular, hay que probar que todas las derivadas de esta función en los extremos del intervalo $[\alpha, \beta]$ son idénticamente nulas, por lo que el gráfico de la misma se "pega" suavemente a cero en dichos puntos).

Evaluemos las distribuciones regulares F_1 y F_2, correspondientes a las funciones localmente integrables f_1 y f_2, respectivamente, en esta función de prueba φ. Tenemos que

$$F_1(\varphi_0) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_1(x)\varphi_0(x)\,dx \quad \text{y} \quad F_2(\varphi_0) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_2(x)\varphi_0(x)\,dx$$

por consiguiente

$$F_1(\varphi_0) - F_2(\varphi_0) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} [f_1(x) - f_2(x)]\varphi_0(x)\,dx = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi_0(x)\,dx = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(x)\, e^{-\frac{1}{(x-\alpha)^2}} . e^{-\frac{1}{(x-\beta)^2}}\,dx \neq 0,$$

lo cual demuestra que las funciones generalizadas F_1 y F_2 son distintas y por tanto la aplicación $\Phi : L^1_{loc}(\mathbb{R}) \to D'(\mathbb{R})$ es **inyectiva.**

Este resultado nos permite identificar a toda función localmente integrable f sobre la recta $\mathbb{R}$ con la función generalizada o distritución regular F construida a partir de dicha función. En ese sentido las funciones localmente integrables pueden considerarse incluidas en el espacio $D'(\mathbb{R})$ de las distribuciones sobre la recta real.

En particular, si ψ es cualquier función de clase C^∞ sobre la recta $\mathbb{R}^1$, ella se puede interpretar como una distribución o función generalizada sobre $\mathbb{R}^1$ mediante la regla

$$\Psi(\varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x)\,\varphi(x)\,dx, \forall\varphi \in D(\mathbb{R})\,..$$

Resulta evidente que la restricción a $C^\infty(\mathbb{R})$ de la aplicación Φ definida anteriormente es una inyección del conjunto $C^\infty(\mathbb{R})$ en el conjunto $D\prime(\mathbb{R})$ que nos permite identificar el espacio vectorial $C^\infty(\mathbb{R})$ de las funciones indefinidamente derivables con un subespacio vectorial del espacio de las distribuciones regulares. En ese sentido se puede escribir la inclusión

$C^\infty(\mathbb{R}) \subset D'(\mathbb{R})\,.$

4. Evidentemente, la función de Heaviside considerada en la conferencia anterior, es localmente integrable

$$H(x) = \begin{cases} 0, & \text{para } x < 0; \\ 1, & \text{para } x \geqslant 0 \end{cases}.$$

y la distribución definida por ella la seguiremos llamando del mismo modo (y denotándola igualmente por H). Para esta función generalizada se cumple la igualdad

$$H(\varphi) = \int_{0}^{+\infty} \varphi(x)\,dx, \forall\varphi \in D(\mathbb{R})\,.$$

5. También es interesante ver qué distribución define la función Sol que se define de la manera siguiente, la cual es obviamente localmente integrable:

$$Sol(x) = \begin{cases} 0, & \text{para } x \neq 0; \\ 1, & \text{para } x = 0. \end{cases}$$

Si denotamos por δ_1 la distribución correspondiente tenemos que

$$\delta_1(\varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} Sol(x)\,\varphi(x)\,dx = 0, .\forall\varphi \in D(\mathbb{R})\,.$$

Por tanto, encontramos que la distribucion $\delta_1$coincide con el elemento neutro 0 del espacio de las distrituciones $D\prime(\mathbb{R})$sobre la recta $\mathbb{R}^1$. No obstante, cuando los productos escalares y las soluciones débiles se definen de una manera razonable, esta distribución (como veremos oportunamente) puede generar interesantes ejemplos de soluciones singulares, las cuales ya hemos llamado siguiendo a Máslov, solitones infinitamente estrechos.

Definición (2.2)

Si α es una función de clase C^∞ sobre la recta $\mathbb{R}^1$, se define el producto de dicha función α por cualquier distribución $T \in D'(\mathbb{R})$ mediante la fórmula

$(\alpha T)(\varphi) = T(\alpha\varphi)\,, \forall\varphi \in D(\mathbb{R})\,.$

Observación 2.1

Sin embargo, no resulta posible definir un producto de dos distribuciones de tal modo que la aplicación que a cada par de distribuciones $(T_1, T_2) \in D\prime(\mathbb{R}) \times D\prime(\mathbb{R})$ le asignara su "producto" $T_1 \cdot T_2 \in D\prime(\mathbb{R})$ sea continua y, además, que el producto de dos distribuciones definidas a partir de funciones f y g pertenecientes a $L^1_{loc}(\mathbb{R})$, coincida con la distribución definida a partir del producto fg de dichas funciones. Precisamente, en la próxima conferencia veremos cómo es posible obviar esta dificultad y en qué sentido resulta posible **"multiplicar dos distribuciones".** Más abajo demostraremos el teorema de imposibilidad de Schwartz, otra de las razones que limitan la aplicación de la teoría de las distribuciones al estudio de los problemas no lineales.

Difererenciación de las funciones generalizadas o distribuciones.

Una característica importante de las funciones generalizadas o distribuciones, lo cual permite utilizarlas en el estudio de las ecuaciones diferenciales, es que resulta posible calcular la derivada de cualquier distribución. Para fundamentar la definición que daremos más adelante, notemos que si f es una función continuamente derivable sobre la recta $\mathbb{R}^1$, entonces evidentemente su derivada $\frac{df}{dx} = f'$ es una función continua sobre dicha recta, por lo cual podemos definir una función generalizada mediante la regla

$$\left(\frac{df}{dx}\right)(\varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{df(x)}{dx}\varphi(x)\,dx, \forall\varphi \in D(\mathbb{R}).$$

Notemos que, si aplicamos el teorema de la integración por partes en esta última integral, obtenemos la igualdad

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{df(x)}{dx}\varphi(x)\,dx = [f(x)\varphi(x)]_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\frac{d\varphi(x)}{dx}dx = -\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\frac{d\varphi(x)}{dx}dx,$$

ya que $\varphi(-\infty) = \varphi(+\infty) = 0$.

Por consiguiente, tiene lugar la identidad

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{df(x)}{dx}\varphi(x)\,dx = -\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\frac{d\varphi(x)}{dx}dx, \forall\varphi \in D(\mathbb{R}).$$

Lo anterior nos sirve de fundamentación para dar la siguiente

Definición (2.3)

Para toda función generalizada o distribución $T \in D'(\mathbb{R})$, se define como la **derivada** de T y se denota por T' (o bien por $\frac{dT}{dx}$) la distribución definida por la fórmula

$$\frac{dT}{dx}(\varphi) = -T\left(\frac{d\varphi}{dx}\right), \forall\varphi \in D(\mathbb{R}).$$

Proposición 2.2

Toda función generalizada $T \in D'(\mathbb{R})$ posee derivadas de todos los órdenes y su $k-$ésima derivada se define mediante la igualdad
$T^{(k)}(\varphi) = (-1)^k T\left(\varphi^{(k)}\right), \forall \varphi \in D(\mathbb{R})$.

Ejemplos

1. Si f es una función continuamente derivable sobre la recta $\mathbb{R}^1$, entonces la derivada $\dfrac{dF}{dx}$ de la distribución F que ella define, coincide con la distribución correspondiente a la derivada (en el sentido usual) de la función f. En efecto,

$$\frac{dF}{dx}(\varphi) = -F\left(\frac{d\varphi}{dx}\right) =$$

$$= -\int_{-\infty}^{+\infty} F(x)\frac{d\varphi(x)}{dx}dx = -\left([F(x)\varphi(x)]_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dF(x)}{dx}\varphi(x)\,dx\right) =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dF(x)}{dx}\varphi(x)\,dx, \forall\varphi \in D(\mathbb{R}).$$

Ahora bien, esta última igualdad corresponde a la definición de la distribución regular definida por la función $\dfrac{dF}{dx}$.

2. Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es continuamente derivable en toda la recta, con excepción de dos puntos x_1 y x_2 donde experimenta saltos iguales a h_1 y h_2, respectivamente, entonces la derivada de la distribución $F \in D'(\mathbb{R})$, definida mediante la fórmula $F(\varphi) =$

2. La derivada de la distribución H de Heaviside está definida por la igualdad

$$\frac{dH}{dx}(\varphi) = -H\left(\frac{d\varphi}{dx}\right) = -\int_0^{+\infty}\frac{d\varphi}{dx}(x)\,dx = -[\varphi(+\infty) - \varphi(0)] = \varphi(0), \forall\varphi \in D(\mathbb{R}).$$

Por consiguiente, la derivada de la distribución H de Heaviside coincide con la distribución δ de Dirac:

$$\frac{dH}{dx} = \delta.$$

3. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continuamente diferenciable en el abierto $\mathbb{R}/\{x_1, x_2\}$ que tiene saltos iguales a h_1 y h_2 en los puntos x_1 y x_2. Entonces esta función f es localmente integrable y por tanto determina una función generalizada $F \in D'(\mathbb{R})$, cuya derivada tiene la forma $F_1' + F_2' + F_3' + h_1\delta(x - x_1) + h_2\delta(x - x_2)$, donde F_1, F_2 y F_3 son las distribuciones determinadas por las restricciones de la derivada $\dfrac{df}{dx}$ a los intervalos $(-\infty, x_1), (x_1, x_2)$ y $(x_2, +\infty)$, respectivamente.

4. Calculemos la derivada $\delta'(x)$ de la función δ de Dirac. En virtud de la definición, $\delta'(\varphi) = -\delta(\varphi') = -\varphi'(0)$. Por consiguiente, la derivada de la función delta de Dirac es la distribución $\delta' \in D'(\mathbb{R})$ definida por la fórmula $\delta'(\varphi) = -\varphi'(0)$.

Proposición 2.3 (Teorema de imposibilidad de Schwartz, 1954).
Sea A cualquier álgebra lineal sobre $\mathbb{R}^1$ que contenga al álgebra $C(\mathbb{R})$ de las funciones continuas sobre $\mathbb{R}$ en calidad de subálgebra y que la función constante 1 sea el elemento neutro para la multiplicación del álgebra A. Suponga además que existe una derivación en el álgebra A, o sea, una aplicación lineal $D : A \to A$ que satisface la regla de Leibnitz para la derivación de un producto $D(a.b) = Da.b + a.Db$, cualesquiera que sean a y b en A, cuya restricción a $C^1(\mathbb{R})$ coincida con la diferenciación usual. Entonces $D^2(|x|) = 0$.

Demostración. (Tomada del libro de J. F. Colombeau, "Multiplication of distributions", Springer Verlga, Berlin, 1992)
En la demostración del teorema tendremos necesidad de utilizar el siguiente

Lema 2.4
Si x denota la aplicación identidad $x \mapsto x$, y a es un elemento arbitrario de A,entonces $xa = 0$ implica $a = 0$.
Demostración.
Las funciones $g(x) = x(\ln|x| - 1)$ y $h(x) = x^2(\ln|x| - 1)$ son continuas en todo punto de la recta, excepto en $x = 0$, donde tienen una discontinuidad evitable. Asignándole a ambas el valor 0 en dicho punto, quedan convertidas en elementos del álgebra $C(\mathbb{R})$ de las funciones continuas sobre $\mathbb{R}$. Aplicando el operador D sobre el producto $g(x).x$, obtenemos la identidad:
$D\{g(x).x\} = Dg(x).x + g(x)$;
y aplicando nuevamente la derivación D se obtiene
$D^2\{g(x).x\} = D(\ Dg(x).x + g(x)) = \left[D^2 g(x)\right].x + 2Dg(x)$,
de donde se obtiene
$\left[D^2 g(x)\right].x = D^2\{g(x).x\} - 2Dg(x)$. $\qquad (*)$
Por otra parte
$Dh(x) = D\left\{x^2(\ln|x| - 1)\right\} = 2x(\ln|x| - 1) + x^2 D(\ln|x| - 1) = 2g(x) + x$;
así que tenemos
$D^2 h(x) = D(2g(x) + x)$,
o sea, $D^2 h(x) = 2Dg(x) + 1$. $\qquad (**)$
Pero $D^2\{g(x).x\} = D^2 h(x)$, luego de $(*)$ y $(**)$ se obtiene la igualdad
$\left[D^2 g(x)\right].x = 1$.
Por tanto, si $x.a = 0$, multiplicando esta igualdad por $y = D^2 g(x)$, obtenemos $\left[D^2 g(x)\right].(x.a) = 0$, por lo que asociando los factores en el primer miembro de esta igualdad obtenemos $\left(\left[D^2 g(x)\right].x\right).a = 1.a = a = 0$, con lo cual queda probado el lema.■

Ahora podemos pasar a la demostración del teorema de imposibilidad.
Sea $h(x) = x.|x|$; entonces $Dh(x) = D(x.|x|) = |x| + x.D(|x|)$. Aplicando nuevamente el operador D, se obtiene $D^2 h(x) = D[Dh(x)] = D[|x| + x.D(|x|)] = 2D(|x|) + x.D^2(|x|)$. Por otra parte, el operador $D : A \to A$, cuando se restringe a la subálgebra $C^1(\mathbb{R})$, coincide con el operador de diferenciación y por tanto en $C^1(\mathbb{R})$ (y por consiguiente en A) se tiene la igualdad $D(x.|x|) = 2|x|$, de la

cual se obtiene que $D^2(x.|x|) = 2D(|x|)$. Teniendo en cuenta la igualdad que habíamos obtenido inicialmente, se deduce necesariamente que $x.D^2(|x|) = 0$. Se aplica ahora **Lema 2.4** para obtener $D^2(|x|) = 0$, con lo cual concluye la demostración del teorema.■

Observación 2.2

La función $x \mapsto |x|$ es continuamente derivable para $x < 0$, con $D(|x|) = -1$ en dicho intervalo, y también es continuamente derivable para $x > 0$, en cuyo caso se tiene $D(|x|) = +1$, por tanto $D^2(|x|)$ debería ser nula fuera de cero, e "infinita" en $x = 0$, mientras que $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} D^2(|x|)\,dx = [D(|x|)]_{-\infty}^{+\infty} = 2$. De este modo, la conclusión del teorema contradice cualquier intuición razonable.

El estudiante debería comprobar que, de acuerdo con la definición dada anteriormente sobre la diferenciación de las funciones generalizadas o distribuciones, resulta que la derivada segunda de la distribución regular definida por la función $|x|$ es igual a 2δ, donde δ es la función de Dirac (así, la evaluación de esta derivada en cualquier función de prueba $\varphi \in D(\mathbb{R})$ nos da $\left(D^2(|x|)\right)(\varphi) = 2\varphi(0)$. Sin embargo, el teorema de imposibilidad implica que el álgebra A no puede contener a la distribución δ de Dirac, lo que hace que semejante álgebra carezca de todo interés.

Observación 2.3.

Las funciones generalizadas o distribuciones no aparecen en el teorema de imposibilidad de Schwartz, en el cual el resultado se obtiene simplemente a partir del álgebra $C(\mathbb{R})$, la derivación de una función continuamente derivable y las reglas de cálculo usuales (en las que la regla de Leibnitz para la derivación de un producto juega un papel fundamental). Todos estos recursos son perfectamente naturales. Sin embargo, la multiplicación de funciones constantes a trozos junto con las reglas usuales de diferenciación produce de inmediato una contradición. En efecto, si consideramos la función H de Heaviside, definida (como se recordará) mediante la fórmula $H(x) = \begin{cases} 0, x < 0 : \\ 1, x \geqslant 0 \end{cases}$, entonces es claro que $H^2 = H$ y, en general, $H^n = H$, para todo $n \geqslant 2$. Derivando esta última igualdad resulta $nH^{n-1}H' = H'$, de donde uno obtiene, por una parte, $2HH' = H'$, lo cual, multiplicando ambos miembros de esta igualdad por H nos lleva a la igualdad $2H^2H' = HH'$, con lo cual (utilizando la igualdad $nH^{n-1}H' = H'$) obtenemos la contradicción $\frac{2}{3}H' = \frac{1}{2}H'$.

3. FUNCIONES GENERALIZADAS SOBRE UN ABIERTO DEL ESPACIO EUCLIDIANO $n-$DIMENSIONAL.

Aunque aquí hemos definido solamente las funciones generalizadas de una variable real, sobre toda la recta, es posible introducir también las funciones generalizadas o ditribuciones sobre cualquier conjunto acotado (por ejemplo un segmento o una circunferencia), así como funciones generalizadas de varias variables, para lo cual podemos utilizar un subconjunto abierto Ω del espacio euclidiano $n-$dimensional $\mathbb{R}^n$. En este caso el conjunto de las funciones básicas es el espacio vectorial $D(\Omega) = C_0^\infty(\Omega)$, formado por las funciones indefinidamente diferenciables $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}$ con soporte compacto (aunque también resulta posible y necesario considerar funciones con valores complejos). En ese caso la convergencia en el espacio de las funciones de prueba se define del modo siguiente: Se dice que una sucesión $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de elementos del espacio $D(\Omega)$ converge a una función $\varphi \in D(\Omega)$ cuando se cumplen las dos condiciones que siguen:

1) Existe un subconjunto compacto K contenido en el abierto Ω, tal que tanto φ como todas los elementos φ_n de la sucesión tengan sus soportes contenidos en K;

2) Para todo operador de diferenciación parcial $D = \dfrac{\partial^{k_1+k_2+...+k_n}}{\partial x_1^{k_1}\partial x_2^{k_2}...\partial x_n^{k_n}}$ (incluyendo el operador identidad $I_n = \dfrac{\partial^{0+0+...+0}}{\partial x_1^0 \partial x_2^0 ... \partial x_n^0}$) la sucesión $(D\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente sobre K a la función $D\varphi$ (o lo que es equivalente, $\lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{x\in\Omega} |D\varphi_n(x) - D\varphi(x)| = 0$).

Definición 3.1

Una distribución sobre Ω es una funcional lineal y continua sobre el espacio vectorial topológico de las funciones de prueba $D(\Omega)$. La continuidad de una funcional $T : D(\Omega) \to \mathbb{R}$ se entiende en el sentido siguiente: $T(\varphi_n) \to T(\varphi)$ en $\mathbb{R}$ (o en $\mathbb{C}$, en el caso de distribuciones con valores complejos) siempre que la sucesión $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tienda a la función φ en el espacio vectorial $D(\Omega)$.

El conjunto de las funciones generalizadas (también llamado de las distribuciones) sobre Ω se denota comúnmente por $D'(\Omega)$. Evidentemente, $D'(\Omega)$ es un espacio vectoral real (o complejo) en el cual las operaciones de adición de distribuciones y multiplicación de distribuciones por escalares se definen de la manera usual, o sea, punto a punto. En este caso también se define una noción de convergencia, de la misma manera que en el caso unidimensional.

Definición 3.2

Si $T \in D'(\Omega)$, entonces se pueden definir las derivadas parciales de T con respecto a las variables $x_i, i = 1, 2, ..., n$ y son distribucióntes que se denotan por $\dfrac{\partial T}{\partial x_i}$, las cuales se definen mediante la regla

$$\frac{\partial T}{\partial x_i}(\varphi) = -T\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\right), \forall \varphi \in D(\Omega).$$

De manera más general, se puede dar la siguiente

Definición 3.3

Sean $T \in D'(\Omega)$ y D un operador de derivación parcial arbitrario de orden k. Entonces $DT \in D'(\Omega)$ es la distribución definida mediante la igualdad

$$DT(\varphi) = (-1)^k T(D\varphi), \forall \varphi \in D(\Omega).$$

Definición 3.4
Si $\alpha \in C^{\infty}(\Omega)$ y $T \in D'(\Omega)$, se define el producto $\alpha T \in D'(\Omega)$ y es la distribución dada por la regla
$(\alpha T)(\varphi) = T(\alpha.\varphi), \forall \varphi \in D(\Omega)$.

Cada función localmente integrable $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ genera una distribución que denotaremos T_f y se define mediante la fórmula

$$T_f\ (\varphi) = \int\limits_{\Omega} f(x)\,\varphi(x)\,dx =$$

$$= \int \cdots \int\limits_{\Omega} f(x_1, x_2, ..., x_n)\,\varphi(x_1, x_2, ..., x_n)\,dx_1 dx_2 ... dx_n.$$

Estas distribuciones reciben el nombre de **distribuciones regulares.** Un conocido **lema** nos permite afirmar que si $T_f\ (\varphi) = 0, \forall \varphi \in D(\Omega)$, entonces $f = 0$ casi dondequiera en $L^1_{loc}(\Omega)$ (o sea, con excepción de un conjunto de **medida nula**). Esto nos garantiza que la aplicación $L^1_{loc}(\Omega) \to D'(\Omega)$ que a cada función localmente integrable f hace corresponder la distribución T_f definida por ella es inyectiva, lo que nos permite identificar al espacio $L^1_{loc}(\Omega)$ con un subespacio de $D'(\Omega)$. En ese sentido, se escribirá sencillamente $L^1_{loc}(\Omega) \subset D'(\Omega)$ y, en particular, $C^{\infty}(\Omega) \subset D'(\Omega)$.

Las distribuciones que no son regulares se denominan **distribuciones singulares.** El ejemplo más elemental de una distribución singular es la función δ de Dirac, que en este caso más general se define de la misma manera mediante la igualdad $\delta(\varphi) = \varphi(0), \forall \varphi \in D(\Omega)$ (en este caso, 0 designa al elemento nulo $(0, 0, ..., 0)$, suponiendo que Ω contenga a dicho punto).

Observación 3.1

Debe notarse que las operaciones de diferenciación (propia de $C^1(\Omega)$) y la multiplicación por funciones de la clase $C^{\infty}(\Omega)$, han podido ser extendidas a $D'(\Omega)$. Sin embargo, si f es una función dos veces diferenciable (pero no continuamente diferenciable) tal que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \neq \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$, se obtiene sin embargo la igualdad $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ en el espacio $D'(\Omega)$. Por consiguiente, la segunda derivada parcial en el sentido clásico y la segunda derivada parcial en el sentido de las distribuciones no son idénticas.

Ejercicio.
Buscar un ejemplo de función f dos veces derivable sobre $\mathbb{R}^2$ para la cual se cumpla la desigualdad $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \neq \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ y comprobar que las distribuciones correspondientes

$\dfrac{\partial^2 T_f}{\partial x \partial y}, \dfrac{\partial^2 T_f}{\partial y \partial x}$ coinciden.

Proposición 3.1 (Teorema de estructura de Schwartz).

Toda distribución es localmente una derivada parcial de alguna función continua. En otras palabras: Para toda $T \in D'(\Omega)$ y para todo punto $x_0 \in \Omega$ existen una vecindad abierta V_{x_0} de x_0 contenida en Ω, una función $f \in C(V_{x_0})$ y un operador D de derivación parcial sobre Ω tales que la restricción $T\,|_{V_{x_0}}$ de la distribución T a la vecindad V_{x_0} coincide con Df en $D'(V_{x_0})$:

$T\,|_{V_{x_0}} = Df$.

Observación 3.2

En la proposición anterior, $T\,|_{V_{x_0}}$ denota la restricción de T a V_{x_0}, cuya definición es obvia si se consideran como funciones de prueba solamente las $\varphi \in D(V_{x_0}) \subset D(\Omega)$.

En virtud de este teorema de estructura, se puede afirmar que las distribuciones constituyen el espacio más pequeño en el cual está permitida la diferenciación (indefinidamente) de tdas las funciones continuas (y también de todas las funciones de $L^p_{loc}(\Omega), p = 1, 2, 3, ..., \infty$.

Observación 3.3

Las distribuciones tienen todas las buenas propiedades de las funciones de clase C^∞, con la excepción de las siguientes limitaciones:

a) no existe una manera razonable de multiplicarlas o realizar otros tipos de operaciones no lineales con ellas;

b) no hay manera de definir su restricción a un subespacio vectorial (por ejemplo, si $\delta \in D'(\mathbb{R}^2)$ es la distribución de Dirac, no es válida su restricción al subespacio $\mathbb{R} \times \{0\}$.

c) Tampoco tiene sentido componer funciones con distribuciones, por ejemplo, si $f \in C^\infty(\mathbb{R})$, algo como $f \circ \delta$ carece de significación.

Estas limitaciones no han sido obstáculo para que las funciones generalizadas o distribuciones hayan ocasionado una fuerte influencia en el desarrollo de la teoría de las ecuaciones diferenciales lineales. Aquí hace falta en primer lugar destacar los trabajos fundamentales de los años 50 del pasado siglo, debidos a la pluma de los destacados matemáticos L. Gording, L. Hörmander, B. Malgrange, I. M. Gelfand y muchos otros, dedicados a la teoría de las ecuaciones diferenciales lineales en derivadas parciales independientemente de su tipo. Los resultados de ese trabajo fueron resumidos por L. Hörmander en su voluminosa monografía "Operadores diferenciales lineales en derivadas parciales", que comenzó a publicar en 1963. En los años 80 y 90 del pasado siglo se lolgró un gran avance en el estudio de la teoría de los así llamados operadores pseudodiferenciales (generalización de los operadores diferenciales e integrales singulares).

En la próxima conferencia nos dedicaremos al estudio de las nuevas funciones generalizadas de J. F. Colombeau, que constituyeron una herramienta fundamental para el trabajo con las ecuaciones diferenciales ordinarias y en derivadas parciales no lineales y ha conocido importantes aplicaciones no solamente en la propia teoría de esas ecuaciones, sino también en otros dominios de la ciencia y la tecnología.

LITERATURA.

1. Kolmogorov-Fomin, "Elementos de la teoría de funciones y el análisis funcional", Moscú, Editorial MIR, 1980.
2. J. F. Colombeau, "Multiplication of distributions", Lecure Notes on Mathematics, 1992.
3. Panters Rodríguez Bermúdez, "Cadena de Hugoniot-Máslov para una onda de choque en una ley de conservación con flujo polinomial", Tesis de maestría en ciencias matemáticas, Universidad de La Habana, Cuba, 2005.