PROFESSOR DR. BALDOMERO VALIÑO ALONSO, UNIVERSIDAD DE LA HABANA, CUBA.

CONFERENCIA N^o 3:

ÁLGEBRA DE LAS FUNCIONES GENERALIZADAS DE J. F. COLOMBEAU.

1. NOCIÓN DE LAS NUEVAS FUNCIONES GENERALIZADAS SEGÚN J. F. COLOMBEAU.

La teoría de las funciones generalizadas permitió introducir un concepto de solución generalizada en el contexto de la teoría de las ecuaciones diferenciales que contribuyó a extender las aplicaciones de dicha teoría en numerosos ejemplos de la mecánica, la física y otras ciencias particulares, para el esclarecimiento de muchos fenómenos que hasta ese momento quedaban fuera de su análisis. Dió un sentido matemáticamente correcto a objetos tales como la δ de Dirac que eran utilizados comúnmente por los físicos teóricos desde los años 20 del pasado siglo y fundamentó los cálculos que se hacían con esta y otras funciones "anómalas", contribuyendo a disipar las ambigüedades que a veces aparecían al utilizarlas. La teoría de funciones generalizadas o de las distribuciones fue una importante herramienta para el tratamiento de toda clase de problemas en las ecuaciones diferenciales lineales y tuvo (y tiene todavía) importantes aplicaciones en distintos dominios de la técnica y las ciencias particulares. Sin embargo, en muchos campos de la física, por ejemplo, en la Teoría Cuántica del Campo, la teoría de las distribuciones resulta inaplicable. Sucede que en tales manipulaciones aparecen productos de distribuciones que los físicos se han visto obligados a interpretar de distinta manera, sin apoyo en una teoría matemática que justificara sus cálculos. En efecto, Laurent Schwartz demostró la no existencia de un álgebra diferencial A (de cualquier clase de "funciones generalizadas" sobre $\mathbb{R}$) que contuviera el álgebra $C(\mathbb{R})$ de las funciones continuas sobre $\mathbb{R}$ en calidad de subálgebra, que preservara la diferenciación de funciones de clase C^1 (de tal modo que la diferenciación en A coincidiera con la clásica) y que tuviera algunas otras propiedades naturales (tales como la regla de Leibnitz para la diferenciación de un producto, el hecho de que la función constante 1 fuera el elemento neutro para la multiplcación del álgebra A, y el hecho de que A contuviera alguna versión de la función δ de Dirac).

Sin embargo, son muchos dominios de la ciencia en los que aparece la necesidad de multiplicar las distribuciones. Si no hablamos más que de la física clásica, podemos mencionar varias de sus ramas en las que esa necesidad se ha hecho patente en la modelación de distintos fenómenos (la elasticidad y la elastoplasticidad, la acústica, y el electromagnetismo, entre otras. Leyes de conservación cuasilineales y no lineales aparecen también en la teoría cuántica del campo, en la mecánica del medio continuo, en el estudio de los fenómenos atmosféricos y en el estudio de la trayectoria de los huracanes, en la ciencia que estudia los tsunamis, en la industria del petróleo.y en muchos otros dominios de la ciencia y la técnica.

Son varios los matemáticos que han intentado distintos procedimientos para construir un álgebra de funciones generalizadas que contenga canónicamente al espacio vectorial de las distribuciones. Sin embargo, el enfoque que más éxito ha tenido en las aplicaciones y en el desarrollo de distintos problemas teóricos, tales como la demostración de existencia y unicidad de soluciones, ha sido la construcción que realizó J. F. Colombeau a principios de los años 80 del siglo XX. En esta conferencia presentaremos las ideas fundamentales de la concepción de las nuevas funciones generalizadas según Colombeau, que han sido la fuente de una importante línea de investigación que desde los años 90 se desarrolla intensamente hasta hoy y promete ser una vía adecuada para dar respuesta coherente a importantes problemas del análisis no lineal de todo tipo de fenomenos en distintos campos de investigación, tanto en la propia matemática como en otras ciencias particulares.

En la teoría matemática de las funciones generalizadas de J. F. Colombeau, los cálculos principales y los recursos numéricos correspondientes adquieren pleno sentido. En su concepción él toma en cuenta los elementos más importantes de los fenómenos que se pretende modelar y plasma en fórmulas matemáticas la expresión más cercana, la que mejor describe el fenómeno y es más próxima a su realidad. El ejemplo más sencillo de ello es la función de Heaviside que interviene en la descripción de cualquier onda de choque. La función clásica de Heaviside en realidad no describe con exactitud el fenómeno de una onda de choque, ya que una brusca variación entre los valores de una magnitud dada no se dan en la realidad física de la manera en que se presenta la discontinuidad en dicha función. En la práctica, tales cambios bruscos sucenden después de una variación continua (más exactamente, suave) en una fracción de tiempo muy pequeña. De esa manera, con mayor propiedad la descripción del fenómeno debería ser una familia uniparamétrica de funciones suaves que tiende hacia la gráfica de la función clásica de Heaviside cuando el valor del parámetro tiende a cero. Así, la idea de Colombeau responde a la forma en que suceden los fenómenos en la práctica real y su descripción está más cerca de describir los hechos tal como suceden en la práctica.

Si Ω es cualquier conjunto abierto en el espacio euclidiano $n-$dimensional $\mathbb{R}^n$, Colombeau define un conjunto $G(\Omega)$ de "nuevas funciones generalizadas" sobre Ω, las cuales pueden tomar valores reales o complejos. Nosotros, al menos para este cursillo, nos atendremos al caso en que las funciones generalizadas de Colombeau toman valores reales. Un elemento de $G(\Omega)$ será denotado por una letra mayúscula, por ejemplo, G, H o F; en ocasiones usaremos la notación $G(x)$, cuando esto no traiga confusión con su valor en el punto x (y solamente hace referencia a la variable genérica en el espacio euclidiano $n-$dimensional en el cual está contenido el abierto Ω. Aunque no nos extenderemos en esta descripción, cada función generalizada G realmente es una clase infinita de familias de funciones dependientes de un parámetro $\epsilon \in (0,1)$. Existe una manera natural de inyectar el conjunto $C^\infty(\Omega)$ de las funciones indefinidamente derivables definidas sobre el abierto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, en el cual tenemos tres operaciones clásicas (la adición de funciones, la multiplicación de funciones por escalares y la multiplicación de funciones) que tienen las propiedades que hacen de la cuaterna $(C^\infty(\Omega), +, \bullet, \cdot)$ un álgebra sobre el cuerpo $\mathbb{R}$ de los números reales (o bien sobre el campo $\mathbb{C}$ de los números complejos):

1) La terna $(C^{\infty}(\Omega), +, \cdot)$ formada por el conjunto $C^{\infty}(\Omega)$, la operación de adición de funciones de clase C^{∞} sobre Ω (que es una ley de composición interna en $C^{\infty}(\Omega)$) y la multiplicación por escalares $k \in \mathbb{R}$, es un espacio vectorial real (por cierto, de dimensión infinita) sobre el cuerpo $\mathbb{R}$ de los números reales.

2) La terna $(C^{\infty}(\Omega), +, \bullet)$ formada por el mismo conjunto $C^{\infty}(\Omega)$ y las dos leyes de composición internas definidas en él (la adición y la multiplicación de funciones) es un anillo conmutativo y unitario.

Además, esta álgebra es diferencial, lo cual significa que todo operador diferencial D de orden arbitrario es un opereador que aplica el álgebra $C^{\infty}(\Omega)$ en sí misma (D puede ser, por ejemplo, un operador diferencial del tipo $D = \dfrac{\partial^{k_1+k_2+\ldots+k_n}}{\partial x_1^{k_1}\partial x_2^{k_2}\ldots\partial x_n^{k_n}}$, de orden $k = k_1 + k_2 + \ldots + k_n$.

Estas operaciones se extienden a $G(\Omega)$ exactamente con las mismas propiedades, de tal modo que $G(\Omega)$ resulta ser un álgebra diferencial de funciones generalizadas, la cual contiene de manera canónica al espacio vectorial topológico $D'(\Omega)$ de las distribuciones sobre Ω, de tal modo que tenemos las "inclusiones"

$C^{\infty}(\Omega) \subset D'(\Omega) \subset G(\Omega)$.

Estas "inclusiones" son realmente aplicaciones inyectivas $C^{\infty}(\Omega) \to D'(\Omega)$, $D'(\Omega) \to G(\Omega)$ y $C^{\infty}(\Omega) \to G(\Omega)$ que permiten cada objeto de partida con el objeto que lo representa en el álgebra diferencial $G(\Omega)$. Como sabemos que no es posible una multiplicación de las distribuciones, aquí podemos multiplicar las funciones generalizadas que las representan, pero el producto puede no resultar la imagen correspondiente a otra distribución (y de hecho, en general no cabe esperar que eso suceda así).

Si Ω_1 es cualquier subconjunto abierto de Ω y G es un elemento del álgebra $G(\Omega)$, entonces su restricción $G\,|_{\Omega_1}$al subconjunto Ω_1 puede ser definida de manera natural como un elemento de $G(\Omega_1)$, lo que constituye exactamente una generalización del concepto clásico de restricción de las funciones de $C^{\infty}(\Omega)$ a un abierto más pequeño Ω_1 contenido en Ω.

Sea $(\Omega_i)_{i \in I}$ una familia arbitraria de subconjuntos abiertos de Ω (donde I representa el conjunto de índices, que no es necesariamente finito ni siquiera numerable) y sea $\Omega_1 = \underset{i \in I}{\cup} \Omega_i$. Si G es un elemento de $G(\Omega)$ tal que

$\forall i \in I, G\,|_{\Omega_i} = 0$ en $G(\Omega_i)$,

entonces

$G\,|_{\Omega_1} = 0$ en $G(\Omega_1)$.

En particular, toda función generalizada $G \in G(\Omega)$ cuyas restricciones a una vecindad de cada punto de Ω sean nulas es la función generalizada 0 (la cual, por supuesto, es una función clásica de clase C^{∞}). En resumen, exactamente como las funciones de la clase C^{∞}, las funciones generalizadas tienen un carácter local. Podemos definir el soporte de una función generalizada G como el complemento de la unión de todos los subconjuntos abiertos de Ω en los cuales las restricciones de G sean nulas (exactamente de la misma manera que en el caso clásico).

Si G es una función generalizada sobre Ω y L es un subespacio vectorial del espacio euclidiano $n-$dimensional $\mathbb{R}^n$ tal que la intersección $\Omega \cap L$ sea no vacía, entonces la restricción de G a $\Omega \cap L$ se define como un elemento de $G(\Omega \cap L)$.

Por ejemplo, si $G(t, x)$ representa una función generalizada en el espacio $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, donde $t \in \mathbb{R}$ y $x \in \mathbb{R}^n$, entonces la restricción de G al subespacio vectorial $\{0\} \times \mathbb{R}^n$ se define de manera natural como un elemento de $G(\mathbb{R}^n)$, y es sencillamente una función generalizada $(0, x) \mapsto G(0, x)$.

Si $D = \dfrac{\partial^{k_1+k_2+\ldots+k_n}}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2} \ldots \partial x_n^{k_n}}$ es cualquier operador de derivación parcial, entonces para toda función generalizada G en el álgebra $G(\Omega)$, su derivada parcial DG se define de manera natural. Cuando G es una función clásica de la clase C^∞, este concepto de derivada parcial coincide exactamente con el usual. La regla de Leibnitz de la derivación de un producto, $D(u.v) = Du.v + v.Dv$ y las extensiones para las derivadas de orden superior y funciones de varias variables se cumplen en $G(\Omega)$.

También se tienen funciones no lineales más generales que los simples productos de funciones generalizadas de $G(\Omega)$. Así, por ejemplo, cuando $G \in G(\Omega)$ toma valores reales, se definen de manera natural las funciones $\sin G, \cos G$ o $\tan G$ y son elementos de $G(\Omega)$ que generalizan exactamente las operaciones clásicas con las funciones de la clase C^∞.

En resumen, para todas esas operaciones las funciones generalizadas se trabajan exactamente de la misma manera que las funciones clásicas de la clase C^∞.

También tenemos una teoría de la integración de las funciones generalizadas: sea G una función generalizada sobre Ω y sea K un subconjunto compacto del abierto Ω. Entonces podemos definir el concepto de la integral de G sobre K, que se denota por $\int_K G(x)\,dx$.

Sin embargo, esta integral no es en general un número real (o complejo). Para definirla necesitamos definir el concepto de número real (o complejo) generalizado. Estos números generalizados pueden ser infinitamente pequeños en valor absoluto y al mismo tiempo diferentes de 0. De hecho, si x es un punto del abierto Ω y G es una función generalizada sobre dicho abierto, entonces $G(x)$ de hecho no representa exactamente un número real o complejo, sino más exactamente, la familia de valores que la familia de funciones correspondiente a la función generalizada G le asigna al punto $x \in \Omega$. En ese sentido, $G(x)$ se define más exactamente como un **número generalizado.**

La teoría de la integración y los valores puntuales de las funciones generalizadas no pueden llevar a confusión porque uno calcula sobre los números reales (o complejos) generalizados de la misma manera que con los números clásicos.

Todas las operaciones descritas anteriormente se obtienen trivialmente (a partir de las definiciones) mediante la reproducción de las operaciones entre las funciones suaves representativas de las funciones generalizadas. Habíamos dicho que una nueva función generalizada en el sentido de Colombeau era una familia uniparamétrica de funciones suaves (de clase C^{∞}) sobre el abierto Ω, por ejemplo, $G = \{R_{\epsilon}\}_{\epsilon\in(0,1)}$. Entonces, si G_1 y G_2 son dos funciones generalizadas sobre Ω, la suma $G_1 + G_2$ es la familia de funciones $\{R_{1,\epsilon} + R_{2,\epsilon}\}_{\epsilon\in(0,1)}$ y el producto $G_1 \bullet G_2$ es la clase de las funciones $\{R_{1,\epsilon} \cdot R_{2,\epsilon}\}_{\epsilon\in(0,1)}$. De la misma manera, si D es cualquier operador diferencial parcial sobre $G(\Omega)$, entonces la función generalizada $DG \in G(\Omega)$ es la familia uniparamétrica de funciones suaves sobre Ω dada de la siguiente manera: $DG = \{DR_{\epsilon}\}_{\epsilon\in(0,1)}$.

La teoría de la integración y la evaluación puntual de las funciones generalizadas funciona exactamente de la misma manera porque los números generalizados se definen exactamente mediante el mismo proceso que las funciones generalizadas, como límites ideales de números clásicos que dependen del parámetro $\epsilon \in (0,1)$.

En efecto, si K es un subconjunto compacto del abierto Ω y $G = \{R_{\epsilon}\}_{\epsilon\in(0,1)}$ es un elemento arbitrario del álgebra diferencial $G(\Omega)$ de las funciones generalizadas de Colombeau, entonces la integral

$$I = \int_K G(x)\,dx$$

es el **"límite ideal"** de las integrales clásicas

$$I_{\epsilon} = \int_K R_{\epsilon}(x)\,dx$$

cuando $\epsilon \to 0$, o sea:

$$I = \int_K G(x)\,dx = \lim_{\epsilon\to 0} I_{\epsilon} = \lim_{\epsilon\to 0}\int_K R_{\epsilon}(x)\,dx.$$

Por consiguiente, esta definición es una extensión obvia de la integración de las funciones de clase C^{∞} definidas sobre el abierto Ω con soporte compacto.

No obstante, conviene aclarar que la definición de la integral como un límite usual sería una simplificación abusiva de las definiciones más precisas dadas por Colombeau en su monografía "Elementary Introduction to New Generalized Functions", North-Holland Mathematical Studies 113, 1985. Para hacer esta introducción nos hemos basado en otro libro más sencillo de Colombeau, "Multiplication of distributions", que está dirigido no precisamente a matemáticos profesionales, sino a investigadores de otras prfesiones que están interesados en adquirir estas herramientas para sus aplicaciones.

En el siguiente parágrafo daremos definiciones precisas de otra álgebra de Colombeau, la cual servirá para nuestros propósitos, que son los de aprovechar los resultados de Máslov para obtener soluciones singulares aproximadas, basándonos en el arsenal de los recursos algebraicos proporcionados por las álgebras diferenciales de Colombeau.

2. FUNCIONES GENERALIZADAS SIMPLIFICADAS DE J. F. COLOMBEAU.

Nos limitaremos al estudio de las funciones generalizadas simplificadas reales, aunque la misma teoría vale para el caso en que se utilicen funciones con valores complejos.

Sea un abierto Ω (preferiblemente conexo) en el espacio euclidiano $n-$dimensional $\mathbb{R}^n$ y consideremos el siguiente conjunto de funciones reales dependientes de un parámetro $\epsilon \in (0,1)$,

$E(\Omega) = \{R(\epsilon, x) : R \text{ es de la clase } C^\infty \text{ con respecto a } x \in \Omega, \text{ para cada } \epsilon \in (0,1)\}$.

Obviamente, cuando en $E(\Omega)$ se definen las operaciones básicas de adición y multiplicación de sucesiones $R(\epsilon, x)$ y la multiplicación de estos elementos por escalares $k \in \mathbb{R}$, se obtiene inmediatamente un álgebra lineal sobre el conjunto de los números reales que es, básicamente, una extensión de la estructura del álgebra de las funciones $C^\infty(\Omega)$ para cada valor fijo del parámetro $\epsilon \in (0,1)$.

Sea $D = \dfrac{\partial^{k_1+k_2+\ldots+k_n}}{\partial x_1^{k_1}\partial x_2^{k_2}\ldots\partial x_n^{k_n}}$ es cualquier operador de derivación parcial sobre Ω.

Consideremos ahora el conjunto

$$E_M(\Omega) = \left\{ \begin{array}{c} R \in E(\Omega): \ \forall K \subset \Omega, \text{ compacto} \\ \text{y } \forall D, \text{ operador de derivación parcial,} \\ \exists q \in \mathbb{N}, c > 0 \text{ y } \eta > 0 \\ \text{tales que } \sup\limits_{x\in K} |DR(\epsilon, x)| \leqslant c\epsilon^{-q}, \forall 0 < \epsilon < \eta \end{array} \right\} \tag{2.1}$$

Llamamos a $E_M(\Omega)$ el subconjunto de las funciones moderadas, que obviamente es una subálgebra conmutativa y unitaria del álgebra $E(\Omega)$, con las operaciones usuales de adición y multiplicación de funciones y la multiplicación de funciones por escalares. Las funciones moderadas son uniformemente acotadas junto con todas sus derivadas polinomialmente.

Por último, denotamos por $N(\Omega)$ el subconjunto de $E_M(\Omega)$ definido del modo siguiente:

$$N(\Omega) = \left\{ \begin{array}{c} R \in E_M(\Omega): \ \forall K \subset \Omega, \text{ compacto} \\ \text{y } \forall D, \text{ operador de derivación parcial,} \\ \exists q \in \mathbb{N}: \forall p \geqslant q, \exists c > 0 \text{ y } \eta > 0 \\ \text{tales que } \sup\limits_{x\in K} |DR(\epsilon, x)| \leqslant c\epsilon^{p-q}, \forall 0 < \epsilon < \eta \end{array} \right\} \tag{2.2}$$

Ejemplos.

1) Si ρ es una función de clase C^∞ con soporte compacto definida sobre el abierto Ω (o sea, si ρ es un elemento del que llamábamos en la conferencia anterior el espacio vectorial topológico $D(\Omega)$ de las funciones de prueba sobre Ω), entonces la familia de funciones $R(\epsilon, x) = \dfrac{1}{\epsilon}\rho\left(\dfrac{x}{\epsilon}\right)$, dependiente del parámetro $\epsilon \in (0,1)$, es un elemento del álgebra de las familias de funciones moderadas $E_M(\Omega)$ sobre Ω.

2) Si, como antes, $\rho \in D(\Omega)$, entonces la familia de funciones $R(\epsilon, x) = e^{-\frac{1}{\epsilon}}\rho\left(\dfrac{x}{\epsilon}\right)$ pertenece al ideal de las funciones nulas o despreciables $N(\Omega)$ sobre

Ω.

Se demuestra fácilmente que $N(\Omega)$ es un subespacio vectorial del espacio vectorial y también un ideal del álgebra $E_M(\Omega)$, lo cual significa que si R es un elemento arbitrario de $E_M(\Omega)$ y $R_1 \in N(\Omega)$, entonces el producto $R.R_1 \in N(\Omega)$, cualequiera que sean $R_1 \in N(\Omega)$.

En estas condiciones, el espacio cociente del álgebra $E_M(\Omega)$ de las funciones moderadas por el ideal $N(\Omega)$ de las funciones nulas (o más bien despreciables) posee una estructura de álgebra.

Por otra parte, como el álgebra de las funciones moderadas $E_M(\Omega)$ sobre Ω es estable para todo operador de derivación parcial D, esta propiedad pasa al cociente de dicha álgebra por el subespacio vectorial $N(\Omega)$ de las funciones nulas o despreciables, de donde se deduce que dicho cociente también es un álgebra diferencial.

Es interesante comprobar que la multiplicación del álgebra $E_M(\Omega)$ es compatible con la relación de equivalencia módulo $N(\Omega)$, razón por la cual la multiplicación se puede extender a las clases de equivalencia (que serán las funciones generalizadas simplificadas). En efecto, supongamos que $R(\epsilon,x) + R_0(\epsilon,x) \in \{R(\epsilon,x)\} + N(\Omega)$ y $R_1(\epsilon,x) + R^0(\epsilon,x) \in \{R_1(\epsilon,x)\} + N(\Omega)$, entonces

$[R(\epsilon,x) + R_0(\epsilon,x)]\left[R_1(\epsilon,x) + R^0(\epsilon,x)\right] =$

$= R(\epsilon,x).R_1(\epsilon,x) + \left[R(\epsilon,x)R^0(\epsilon,x) + Q(\epsilon,X)\right],$

donde $Q\epsilon,x = R_0(\epsilon,x).R_1(\epsilon,x)+R_0(\epsilon,x).R^0(\epsilon,x)$ es un elemento del ideal $N(\Omega)$.

Por consiguiente,

$R(\epsilon,x).R_1(\epsilon,x)+\left[R(\epsilon,x)R^0(\epsilon,x) + Q(\epsilon,X)\right] \in \{R(\epsilon,x).R_1(\epsilon,x)\}+N(\Omega).$

Por tanto hemos llegado al momento de definir las funciones generalizadas simplificadas mediante la siguiente

Definición 2.1

El álgebra de las funciones generalizadas simplificadas es el espacio vectorial cociente $G_S(\Omega) = \dfrac{E_M(\Omega)}{N(\Omega)}$.

Por consiguiente, cada función generalizada simplificada G sobre Ω es una clase de equivalencia módulo $N(\Omega)$ de un elemento del álgebra $E_M(\Omega)$ de las funciones moderadas sobre Ω y por tanto se describe como un conjunto de la forma $G = \{R(\epsilon,x)\} + N(\Omega)$. Cada una de las funciones de esta clase se dice **representativa** de la función generalizada simplificada correspondiente y la diferencia entre dos funciones representativas de una misma función generalizada simplificada es un elemento del ideal $N(\Omega)$.

El álgebra $G_S(\Omega)$ también recibe el nombre de **álgebra especial de Colombeau.**

Observación 2.1

La restricción de los elementos de $G_S(\Omega)$ a subconjuntos abiertos de Ω se define de manera similar a lo visto en el parágrafo anterior. Se puede ver que la correspondencia $\Omega \mapsto G_S(\Omega)$ es un haz de álgebras diferenciales sobre $\mathbb{R}^n$.

El espacio de las distribuciones de soporte compacto está sumergido en $G_S(\Omega)$ mediante la convolución $*$ de distribuciones; en efecto, se obtiene una aplicación inyectiva

$\iota : E'(\Omega) \to G_S(\Omega)$ definiendo $\iota(\omega) =$ clase de $(\omega * (\varphi_\epsilon)\,|_\Omega)_{\epsilon\in(0,1)}$, donde $\varphi_\epsilon(x) = \epsilon^{-n}\varphi\left(\dfrac{x}{\epsilon}\right)$ se obtiene reescalando una función de prueba fija $\varphi \in S(\mathbb{R}^n)$ (o sea, rápidamente decreciente en el infinito) tal que $\int\limits_{\mathbb{R}^n}\varphi(x)\,dx = 1$ y $\int\limits_{\mathbb{R}^n} x^p\varphi(x)\,dx = 0$ para todo $p = 1,2,3,...$Por la propiedad del haz de funciones generalizadas, esta aplicación puede ser extendida de manera única al espacio de las distribuciones $D'(\Omega)$.

Una de las principales características de la construcción de Colombeau es el hecho de que esta misma aplicación envía a $C^\infty(\Omega)$ en una subálgebra de $G_S(\Omega)$. En efecto. si $\varphi \in C^\infty(\Omega)$, entonces podemos definir una familia constante de elementos de $R(\epsilon,x) = \varphi(x), \forall\epsilon \in (0,1)$ y la aplicación $\sigma : C^\infty(\Omega) \to G_S(\Omega)$ definida por

$\sigma(\varphi)$ =clase de $R(\epsilon,x)$ =clase de $\varphi(x)$ es una inyección. Entonces la importante igualdad $\iota(\varphi) = \sigma(\varphi)$ se cumple en $G_S(\Omega)$.

Si G es un elemento del álgebra de Colombeau $G_S(\Omega)$ y f es una función suave la cual a lo sumo tiene crecimiento polinomial en el infinito, junto con todas sus derivadas, entonces está bien definida la evaluación de f en la función generalizada $G \in G_S(\Omega)$ y da un elemento $f(G) \in G_S(\Omega)$.Un elemento $G \in G_S(\Omega)$ se dice que es de tipo L^p **local** $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$ si G posee una función representativa $R(\epsilon,x)$ tal que $\limsup\limits_{\epsilon\to 0}\|R(\epsilon,x)\|_{L^p(K)} < \infty$, para todo subconjunto compacto $K \Subset \Omega$.

La teoría de la regularidad está basada en la subálgebra $G_S^\infty(\Omega)$ de las **funciones generalizadas simplificadas regulares** en $G_S(\Omega)$. Esta subálgebra está definida por aquellos elementos de $G_S(\Omega)$ que poseen funciones representativas $R(\epsilon,x)$ que satisfacen la condición:

$\forall K \Subset \Omega, \exists p \geqslant 0$ tal que $\forall\alpha \in \mathbb{N}^n$ se cumple $\sup\limits_{x\in K}|D^\alpha R(\epsilon,x)| = O(\epsilon^{-p})$ cuando $\epsilon \to 0$. (2.3).

Observe en (2.3) el cambio en el orden de los cuatificadores $\forall$ y $\exists$ con respecto a la condición (2.1) ; localmente, todas las derivadas de una función generalizada regular tienen el mismo orden de crecimiento en $\epsilon > 0$. A los efectos de describir la regularidad de las funciones generalizadas simplificadas de Colombeau, $G_S^\infty(\Omega)$ juega el mismo papel que $C^\infty(\Omega)$ con respecto a las distribuciones $D'(\Omega)$.

Observación 2.2

Dos funciones generalizadas simplificadas G y G_1 se dicen iguales en el álgebra $G_s(\Omega)$ si y solo si la diferencia entre dos cualesquiera de sus elementos representativos pertenece al ideal $N(\Omega)$. En ese caso escribimos $G = G_1$. En otras palabras, la **igualdad** de funciones generalizadas simplificadas es la identidad entre ellas (como elementos de un espacio vectorial cociente). Esta es lo que podríamos llamar una **igualdad fuerte.** Pero en $G_S(\Omega)$ existe otra relación de equivalencia que convive con la anterior y puede considerarse una **igualdad débil.** Se trata de la asociación de funciones generalizadas simplificadas (que también pudimos definir entre las nuevas funciones generalizadas de Colombeau, pero dejamos este concepto para darlo ahora porque es en este contexto que va a ser mayormente utilizado en este curso). Dada la importancia que tendrá este concepto en las aplicaciones a la teoría de las leyes de conservación y, en particular, a la búsqueda de soluciones singulares aproximadas de dichas ecuaciones, definiremos la asociación de funciones generalizadas simplificadas en el próximo parágrafo.

3. ASOCIACIÓN DE LAS FUNCIONES GENERALIZADAS SIMPLIFICADAS DE COLOMBEAU.

Definición 3.1

Sean G_1 y G_2 dos elementos del álgebra diferencial $G_S(\Omega)$. Se dice que G_1 **está asociada con** G_2 si existen funciones $R_1(\epsilon, x), R_2(\epsilon, x)$ en el álgebra $E_M(\Omega)$, representantes de G_1 y G_2, respectivamente, tales que

$$\lim_{\epsilon \to 0} \int_{\Omega} [R_1(\epsilon, x) - R_2(\epsilon, x)] \varphi(x)\, dx = 0, \forall \varphi \in D(\Omega). \tag{3.1}$$

Para denotar que G_1 y G_2 están asociadas, se escribe simplemente $G_1 \sim G_2$.

Proposición 3.1

La definición dada anteriormente es correcta (o sea, es independiente de la elección de los representantes escogidos de las funciones generalizadas G_1 y G_2.

Demostración.

Sean $R_1(\epsilon, x), R_2(\epsilon, x) \in E_M(\Omega)$ los representantes de las funciones generalizadas G_1 y $G_2 \in G_S(\Omega)$, escogidos para dar la **definición 3.1** y sean $R_1^0(\epsilon, x), R_2^0(\epsilon, x)$ otros representantes de estas mismas funciones generalizadas. Entonces

$R_1(\epsilon, x) = R_1^0(\epsilon, x) + Q_1(\epsilon, x)$;

$R_2(\epsilon, x) = R_2^0(\epsilon, x) + Q_2(\epsilon, x)$,

donde $Q_1(\epsilon, x)$ y $Q_2(\epsilon, x)$ son elementos del ideal $N(\Omega)$ de las funciones despreciables.

Tenemos que

$$\lim_{\epsilon \to 0} \int_{\Omega} \left[R_1^0(\epsilon, x) - R_2^0(\epsilon, x)\right] \varphi(x)\, dx =$$

$$= \lim_{\epsilon \to 0} \int_{\Omega} [(R_1(\epsilon, x) - Q_1(\epsilon, x)) - (R_2(\epsilon, x) - Q_2(\epsilon, x))] \varphi(x)\, dx =$$

$$= \lim_{\epsilon \to 0} \int_{\Omega} [(R_1(\epsilon, x) - R_2(\epsilon, x)) - (Q_1(\epsilon, x) - Q_2(\epsilon, x))] \varphi(x)\, dx =$$

$$= \lim_{\epsilon\to 0}\int_{\Omega} \left[R_1(\epsilon,x) - R_2(\epsilon,x)\right]\varphi(x)\,dx - \lim_{\epsilon\to 0}\int_{\Omega} \left[Q_1(\epsilon,x) - Q_2(\epsilon,x)\right]\varphi(x)\,dx.$$

Pero $Q_1(\epsilon,x) - Q_2(\epsilon,x) \in N(\Omega)$, y por tanto, en virtud de (2.2), para la función $Q(\epsilon,x) = Q_1(\epsilon,x) - Q_2(\epsilon,x)$ se cumple que $\forall K \subset \Omega$, compacto y $\forall D$, operador de derivación parcial, $\exists q \in \mathbb{N} : \forall p \geqslant q, \exists c > 0$ y $\eta > 0$ tales que $\sup_{x\in K}|DQ(\epsilon,x)| \leqslant c\epsilon^{p-q}, \forall 0 < \epsilon < \eta$. En particular se cumple que $\sup_{x\in K}|Q(\epsilon,x)| \leqslant c\epsilon$ y, a partir de esto,

$$\lim_{\epsilon\to 0}\int_{\Omega} \left[Q_1(\epsilon,x) - Q_2(\epsilon,x)\right]\varphi(x)\,dx =$$

$$= \lim_{\epsilon\to 0}\int_{\Omega} Q(\epsilon,x)\varphi(x)\,dx = 0, \forall\varphi \in D(\Omega)\,..$$

Por consiguiente, se tiene también

$$\lim_{\epsilon\to 0}\int_{\Omega} \left[R_1^0(\epsilon,x) - R_2^0(\epsilon,x)\right]\varphi(x)\,dx =$$

$$= \lim_{\epsilon\to 0}\int_{\Omega} \left[R_1^0(\epsilon,x) - R_2^0(\epsilon,x)\right]\varphi(x)\,dx, \forall\varphi \in D(\Omega)\,.$$

Proposición 3.2

La asociación de funciones generalizadas simplificadas es una relación de equivalencia en el álgebra diferencial de Colombeau $G_S(\Omega)$, compatible con la adición de funciones generalizadas y con la diferenciación.

Demostración.

En efecto, la asociación de funciones generalizadas en $G_S(\Omega)$ posee las siguientes propiedades:

1) **es reflexiva:** $G \sim G, \forall G \in G_S(\Omega)$;

2) **es simétrica:** Si $G_1 \sim G_2$, entonces $G_2 \sim G_1$, cualesquiera sean G_1 y G_2 en $G_S(\Omega)$;

3) **es transitiva:** Si $G_1 \sim G_2$ y $G_2 \sim G_3$, entonces $G_1 \sim G_3$, cualesquiera sean G_1, G_2 y G_3 en $G_S(\Omega)$.

Las dos primeras propiedades son obvias, para demostrar la tercera escojamos representantes $R_1(\epsilon,x)$, $R_2(\epsilon,x)$ y $R_3(\epsilon,x)$ de las funciones generalizadas G_1, G_2 y G_3, respectivamente. Entonces se puede escribir que

$$(G_1 \sim G_2) \Rightarrow \left(\lim_{\epsilon\to 0}\int_{\Omega} \left[R_1(\epsilon,x) - R_2(\epsilon,x)\right]\varphi(x)\,dx = 0, \forall\varphi \in D(\Omega)\right);$$

y

$$(G_2 \sim G_3) \Rightarrow \left(\lim_{\epsilon\to 0}\int_{\Omega} \left[R_2(\epsilon,x) - R_3(\epsilon,x)\right]\varphi(x)\,dx = 0, \forall\varphi \in D(\Omega)\right).$$

Por consiguiente

$$\lim_{\epsilon\to 0}\int_{\Omega}\left[R_1(\epsilon,x)-R_2(\epsilon,x)\right]\varphi(x)\,dx+\lim_{\epsilon\to 0}\int_{\Omega}\left[R_2(\epsilon,x)-R_3(\epsilon,x)\right]\varphi(x)\,dx=$$

$$=\lim_{\epsilon\to 0}\int_{\Omega}\left[R_1(\epsilon,x)-R_2(\epsilon,x)+R_2(\epsilon,x)-R_3(\epsilon,x)\right]\varphi(x)\,dx=$$

$$=\lim_{\epsilon\to 0}\int_{\Omega}\left[R_1(\epsilon,x)-R_3(\epsilon,x)\right]\varphi(x)\,dx=0,\forall\varphi\in D(\Omega).$$

Esto último nos permite afirmar que $G_1\sim G_3$ y por tanto, la asociación de funciones generalizadas es transitiva.

Por otra parte, si $G_1\sim G_2$ y $G_3\sim G_4$, entonces escogiendo representantes $R_1(\epsilon,x)$, $R_2(\epsilon,x)$, $R_3(\epsilon,x)$ y $R_4(\epsilon,x)$ de las funciones generalizadas G_1, G_2 ,G_3 y G_4,respectivamente, podemos escribir las igualdades

$$\lim_{\epsilon\to 0}\int_{\Omega}\left[R_1(\epsilon,x)-R_2(\epsilon,x)\right]\varphi(x)\,dx=0;$$

$$\lim_{\epsilon\to 0}\int_{\Omega}\left[R_3(\epsilon,x)-R_4(\epsilon,x)\right]\varphi(x)\,dx=0;$$

por tanto, sumando miembro a miembro estas igualdades obtenemos

$$\lim_{\epsilon\to 0}\int_{\Omega}\left[\left(R_1(\epsilon,x)+R_3(\epsilon,x)\right)-\left(R_2(\epsilon,x)+R_4(\epsilon,x)\right)\right]\varphi(x)\,dx=0,\forall\varphi\in D(\Omega),$$

lo que nos dice que $(G_1+G_3)\sim(G_2+G_4)$ y por tanto, la asociación de funciones generalizadas es compatible con la adición en $G_S(\Omega)$.

De la misma manera, si D es cualquier operador de derivación parcial sobre $G_S(\Omega)$ y $G_1\sim G_2$, entonces $DG_1\sim DG_2$. En efecto, escojamos representantes $R_1(\epsilon,x)$ y $R_2(\epsilon,x)$ de G_1 y G_2; en ese caso, las funciones $DR_1(\epsilon,x)$ y $DR_2(\epsilon,x)$ son representantes de las funciones generalizadas DG_1 y DG_2. Entonces, para cada función de prueba $\varphi\in D(\Omega)$ escribamos el límite

$$\lim_{\epsilon\to 0}\int_{\Omega}\left[DR_1(\epsilon,x)-DR_2(\epsilon,x)\right]\varphi(x)\,dx.$$

Ahora bien, $\left|DR_1(\epsilon,x)-DR_2(\epsilon,x)\right|\leqslant\|D\|_K\ \left|R_1(\epsilon,x)-R_2(\epsilon,x)\right|$, para todo x perteneciente a un conjunto compacto $K\Subset\Omega$. Por consiguiente,

$$\left|\int_{\Omega}\left[DR_1(\epsilon,x)-DR_2(\epsilon,x)\right]\varphi(x)\,dx\right|\leqslant\|D\|_K\left|\int_{\Omega}\left[R_1(\epsilon,x)-R_2(\epsilon,x)\right]\varphi(x)\,dx\right|,$$

por tanto si

$$\lim_{\epsilon\to 0}\int_{\Omega}\left[R_1(\epsilon,x)-R_2(\epsilon,x)\right]\varphi(x)\,dx=0,\forall\varphi\in D(\Omega),$$

entonces con mayor razón será

$$\lim_{\epsilon\to 0}\int_{\Omega}\left[DR_1(\epsilon,x)-DR_2(\epsilon,x)\right]\varphi(x)\,dx=0,\forall\varphi\in D(\Omega),$$

con lo cual queda probado que $DG_1 \sim DG_2$.

Observación 3.1

La asociación de funciones generalizadas es obviamente compatible con la multiplicación de funciones generalizadas por escalares (o sea, $(G_1 \sim G_2) \Rightarrow (kG_1 \sim kG_2)$, cualquiera sea el escalar $k \in \mathbb{R}$.

Sin embargo, **no es compatible con la multiplicación de funciones generalizadas.** Esto es, de $G_1 \sim G_2$ no se deduce, en general, que $G.G_1 \sim G.G_2$, siendo G, G_1 y G_2 elementos de $G_S(\Omega)$.

Ejercicio.

Encontrar un contraejemplo que prueba la veracidad de la afirmación anterior.

Sin embargo, se cumple la siguiente

Proposición 3.4

Si $f \in C^\infty(\Omega)$ y G_1, G_2 son funciones generalizadas del álgebra de Colombeau $G_S(\Omega)$ tales que $G_1 \sim G_2$, entonces el producto de f por G_1 está asociado con el producto de f por G_2 :

$fG_1 \sim fG_2$.

Demostración.

Como $G_1 \sim G_2$, se tiene que

$$\lim_{\epsilon \to 0} \int_\Omega [R_1(\epsilon, x) - R_2(\epsilon, x)] \varphi(x)\, dx = 0, \forall \varphi \in D(\Omega),$$

donde R_1 y R_2 son funciones de $E_M(\Omega)$, representativas de las funciones generalizadas $G_1, G_2 \in G_S(\Omega)$, respectivamente. Pero entonces se obtiene obviamente la igualdad

$$\lim_{\epsilon \to 0} \int_\Omega [f(x) R_1(\epsilon, x) - f(x) R_2(\epsilon, x)] \varphi(x)\, dx = 0, \forall \varphi \in D(\Omega),$$

la cual expresa que la función generalizada fG_1 está asociada con fG_2.■

Problema para el trabajo independiente.

Dar un ejemplo de tres funciones generalizadas G, G_1 y $G_2 \in G_S(\Omega)$, tales que $G_1 \sim G_2$, pero sin embargo GG_1 no esté asociada a GG_2.

Observación 3.2

Para el lector familiarizado con la teoría de las distrituciones, la relación de asociación en $G_S(\Omega)$ es la más convincente generalización de la igualdad de dos distribuciones. Como se mencionó anteriormente, la asociación no es coherente con la multiplicación de funciones generalizadas en $G_S(\Omega)$, lo cual, teniendo en cuenta la afirmación precedente, está en correspondencia con el teorema de Schwartz sobre la imposibilidad de la multiplicación de las distribuciones.

4. CONEXIÓN ENTRE EL ESPACIO DE LAS DISTRIBUCIONES Y EL ÁLGEBRA $G_S(\Omega)$ DE LAS FUNCIONES GENERALIZADAS DE COLOMBEAU.

Definición 4.1

Se dice que una función generalizada simplificada $G \in G_S(\Omega)$ admite a la distribución $T \in D'(\Omega)$ como **aspecto macroscópico** si y solo si

$$\lim_{\epsilon \to 0} \int_{\Omega} R(\epsilon, x)\, \varphi(x)\, dx = T(\varphi), \forall \varphi \in D(\Omega),$$

donde $R(\epsilon, x) \in E_M(\Omega)$ es un representante arbitrario de la función generalizada G.

Proposición 4.1

Si $G_1 \in G_S(\Omega)$ admite a la distribución $T \in D'(\Omega)$ como aspecto macroscópico y $G_2 \in G_S(\Omega)$ está asociada con G_1, entonces G_2 también admite a la misma distribución $T \in D'(\Omega)$ como aspecto macroscópico.

Demostración.

En efecto, si $G_1 \in G_S(\Omega)$ admite a la distribución $T \in D'(\Omega)$ como aspecto macroscópico, entonces para alguna función $R_1(\epsilon, x) \in E_M(\Omega)$ se cumple la igualdad

$$\lim_{\epsilon \to 0} \int_{\Omega} R_1(\epsilon, x)\, \varphi(x)\, dx = T(\varphi), \forall \varphi \in D(\Omega).$$

Pero $G_2 \sim G_1$, por tanto si $R_2(\epsilon, x) \in E_M(\Omega)$ es alguna representante de la función generalizada G_2, se cumple que

$$\lim_{\epsilon \to 0} \int_{\Omega} [R_1(\epsilon, x) - R_2(\epsilon, x)]\, \varphi(x)\, dx = 0, \forall \varphi \in D(\Omega).$$

Pero esto es equivalente a escribir

$$\lim_{\epsilon \to 0} \int_{\Omega} R_1(\epsilon, x)\, \varphi(x)\, dx = \lim_{\epsilon \to 0} \int_{\Omega} R_2(\epsilon, x)\, \varphi(x)\, dx, \forall \varphi \in D(\Omega).$$

Por consiguiente, también se cumple que

$$\lim_{\epsilon \to 0} \int_{\Omega} R_2(\epsilon, x)\, \varphi(x)\, dx = T(\varphi), \forall \varphi \in D(\Omega). \blacksquare$$

5. FUNCIONES GENERALIZADAS DE HEAVISIDE EN EL ÁLGEBRA $G_S(\mathbb{R})$.

Al principio de la conferencia habíamos mostrado la inconveniencia de multiplicar funciones escalonadas, tales como la función clásica de Heaviside, porque nos llevaba a contradiciones con el hecho de que la derivada de H en $D'(\mathbb{R})$, que es la distribución δ de Dirac, es manifiestamente no nula. Sin embargo, derivando la igualdad $H^n = H$ se obtiene la relación $nH^{n-1}H' = H'$, para todo número natural $n > 1$. En particular, $HH\prime = \frac{1}{2}H'$. Multiplicando ambos miembros de esta igualdad por H nos da $H^2H\prime = \frac{1}{2}HH'$. Pero $H^2H\prime = \frac{1}{3}H'$, luego obtenemos la contradicción $\frac{1}{3}H' = \frac{1}{4}H'$, o sea, $\frac{1}{3}\delta = \frac{1}{4}\delta$, lo que es imposible dado que $\delta \neq 0$.

Esta contradicción deja de existir en $G_S(\mathbb{R})$ dado que es posible definir en ese contexto infinitas funciones generalizadas que tienen como aspecto macroscópico la distribución de Heaviside y que, siendo distintas, van a resultar tales que $H^n - H \neq 0$, si bien esa diferencia es un "infinitseimal" que, como veremos oportunamente, nos permite escribir sin embargo la relación de asociación que son distintas y por consiguiente, aunque cualquier potencia de una función generalizada de Heaviside lo es igualmente, pero son diferentes.$H^n \sim H$.

En esta sección daremos las definiciones pertinentes de estos ejemplos de funciones generalizadas, tan imortantes como son para las aplicaciones de las leyes de conservación.

Definición 5.1 (Funciones generalizadas de Heaviside en el álgebra de Colombeau $G_S(\mathbb{R})$).

Una función generalizada $H \in G_S(\mathbb{R})$ se denomina **función generalizada de Heaviside** si existe una función representante de la misma $R_H \in E_M(\mathbb{R})$ para la cual existe una función $A(\epsilon) > 0$, tal que $\lim_{\epsilon\to 0} A(\epsilon) = 0$ y para la cual se cumplen las siguientes afirmaciones:

1. $R_H(\epsilon, x) = 0, \forall\epsilon \in (0,1), x < -A(\epsilon);$
2. $R_H(\epsilon, x) = 1, \forall\epsilon \in (0,1), x > A(\epsilon);$
3. $\sup_{x\in\mathbb{R}} |R_H(\epsilon, x)| < 0, \forall\epsilon \in (0,1).$

Observación 5.1

De esta definición se desprende fácilmente que cualquier potencia de una función generalizada de Heaviside es también una función generalizada de Heaviside.

Proposición 5.1

El aspecto macroscópico de cualquier función generalizada de Heaviside $H \in G_S(\mathbb{R})$ es la distribución que antes habíamos denominado de la misma manera y la cual habíamos denotado $T_H \in D'(\mathbb{R})$, donde en ese caso denotábamos por H la **función clásica de Heaviside,** definida mediante la igualdad $H(x) = \begin{cases} 0, x < 0; \\ 1, x \geqslant 0. \end{cases}$

Demostración.

En efecto, si $H \in G_S(\mathbb{R})$ y $R_H \in E_M(\mathbb{R})$ es una representante arbitraria de dicha función generalizada (o sea, una función R_H que posee las condiciones requeridas en la **definición 5.1**), entonces para toda función de prueba $\varphi \in D(\mathbb{R})$ se tiene

$$\lim_{\epsilon\to 0}\int_{-\infty}^{+\infty} R_H(\epsilon,x)\varphi(x)\,dx = \lim_{\epsilon\to 0}\int_{-A(\epsilon)}^{+A(\epsilon)} R_H(\epsilon,x)\varphi(x)\,dx + \lim_{\epsilon\to 0}\int_{+A(\epsilon)}^{+\infty} \varphi(x)\,dx.$$

Pero $\lim\limits_{\epsilon\to 0}\int\limits_{-A(\epsilon)}^{+A(\epsilon)} R_H(\epsilon,x)\varphi(x)\,dx = 0$, porque el integrando está acotado (recordemos que R_H, según la condición 3. de la **definición 5.1** es una función tal que $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}}|R_H(\epsilon,x)| < 0, \forall\epsilon \in (0,1)$) y la longitud del intervalo de integración $[-A(\epsilon), A(\epsilon)]$ tiende a cero cuando $\epsilon \to 0$. Por consiguiente se obtiene la igualdad

$$\lim_{\epsilon\to 0}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} R_H(\epsilon,x)\varphi(x)\,dx = \lim_{\epsilon\to 0}\int\limits_{+A(\epsilon)}^{+\infty}\varphi(x)\,dx = \int\limits_{0}^{+\infty}\varphi(x)\,dx, \forall\varphi\in D(\mathbb{R}).$$

Pero este es, precisamente, el resultado de evaluar la distribución de Heaviside $T_H \in D'(\mathbb{R})$ en cualquier función de prueba $\varphi \in D(\mathbb{R})$. En definitiva, lo que hemos obtenido es que

$$\lim_{\epsilon\to 0}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} R_H(\epsilon,x)\varphi(x)\,dx = T_H(\varphi), \forall\varphi\in D(\mathbb{R}).$$

Así queda probado la distribución de Heaviside $T_H \in D'(\mathbb{R})$ es el aspecto macroscópico de toda función generalizada de Heaviside $H \in G_S(\mathbb{R})$.■

Proposición 5.2.

Si H_1 y H_2 son funciones generalizadas de Heaviside en el álgebra $G_S(\mathbb{R})$, entonces $H_1 \sim H_2$ y por tanto su aspecto macroscópico es la distribución de Heaviside $T_H \in D'(\mathbb{R})$.

Demostración.

En efecto, si R_{H_1} y $R_{H_2} \in E_M(\mathbb{R})$ son funciones representantes arbitrarias de las funciones generalizadas H_1 y $H_2 \in G_S(\mathbb{R})$, respectivamente, entonces

$$\lim_{\epsilon\to 0}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} R_{H_1}(\epsilon,x)\varphi(x)\,dx = \lim_{\epsilon\to 0}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} R_{H_2}(\epsilon,x)\varphi(x)\,dx = T_H(\varphi), \forall\varphi\in D(\mathbb{R}).$$

Por tanto de las igualdades anteriores se deduce que

$$\lim_{\epsilon\to 0}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}[R_{H_1}(\epsilon,x) - R_{H_2}(\epsilon,x)]\varphi(x)\,dx = 0, \forall\varphi\in D(\mathbb{R}).$$

Pero esto significa, precisamente, según la definición de asociación de funciones generalizadas, que $H_1 \sim H_2$. Por tanto ambas funciones generalizadas tienen el mismo aspecto macroscópico en la distribución de Heaviside $T_H \in D'(\mathbb{R})$.■

Pregunda y ejercicio.

¿Forman las funciones generalizadas de Heaviside una subálgebra del álgebra simplificada de Colombeau $G_S(\mathbb{R})$? Demuestre esta afirmación, o muestre un contraejemplo.

Definición 5.2 (Funciones generalizadas de Dirac en el álgebra de Colombeau $G_S(\mathbb{R})$).

Una función generalizada $\delta \in G_S(\mathbb{R})$ se denomina **función generalizada de Dirac** si existe una función $R_\delta \in E_S(\mathbb{R})$ representante de la misma, para la cual existe una función $A(\epsilon) > 0$, tal que $\lim\limits_{\epsilon\to 0} A(\epsilon) = 0$ y que tiene las propiedades que siguen:

1. $R_\delta(\epsilon, x) = 0, \forall \epsilon \in (0,1), |x| > A(\epsilon);$
2. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} R_\delta(\epsilon, x)\, dx = 1, \forall \epsilon \in (0,1);$
3. $\sup\limits_{\epsilon\in(0,1)} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |R_\delta(\epsilon, x)|\, dx < +\infty.$

Proposición 5.3.

Si $\delta_0 \in G_S(\mathbb{R})$ es una función generalizada de Dirac, entonces existe una función generalizada de Heaviside $H_0 \in G_S(\mathbb{R})$ tal que $H_0' = \delta_0$.

Demostración.

Sea $R_{\delta_0} \in E_M(\mathbb{R})$ una representante de la función generalizada de Dirac $\delta_0 \in G_S(\mathbb{R})$; o sea, una función $R_{\delta_0} \in E_M(\mathbb{R})$ que satisface todas las condiciones enunciadas en la **definición 5.2**, a saber, para la cual existe una función $A(\epsilon) > 0$, tal que $\lim\limits_{\epsilon\to 0} A(\epsilon) = 0$ y que tiene las propiedades que siguen:

1. $R_{\delta_0}(\epsilon, x) = 0, \forall \epsilon \in (0,1), |x| > A(\epsilon);$
2. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} R_{\delta_0}(\epsilon, x)\, dx = 1, \forall \epsilon \in (0,1);$
3. $\sup\limits_{\epsilon\in(0,1)} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |R_{\delta_0}(\epsilon, x)|\, dx < +\infty.$

Definamos ahora una función que denotaremos R_{H_0} sobre la recta $\mathbb{R}$ y dependiente del parámetro $\epsilon \in (0,1)$, mediante la fórmula

$$R_{H_0}(\epsilon, x) = \int\limits_{-A(\epsilon)}^{x} R_{\delta_0}(\epsilon, s)\, ds.$$

Primeramente comprobaremos que $R_{H_0} \in E_M(\mathbb{R})$. Como $R_{\delta_0} \in E_M(\mathbb{R})$, entonces para todo conjunto compacto $K \subset \mathbb{R}$ y para todo $m \in \mathbb{N}$, existen números $q \in \mathbb{N}, c > 0$ y $\eta > 0$ tales que $\sup\limits_{x\in K} \left| R_{\delta_0}^{(m)}(\epsilon, x) \right| \leqslant c\epsilon^{-q}, \forall \epsilon \in (0, \eta)$. Entonces, para todo $k \in \mathbb{N}, k \geqslant 1$,

$$\sup_{x\in K} \left| R_{H_0}^{(k)}(\epsilon, x) \right| = \left| R_{\delta_0}^{(k-1)}(\epsilon, x) \right| \leqslant c\epsilon^{-q}, \text{ para todo } \epsilon \text{ tal que } 0 < \epsilon < \eta.$$

De esta manera, para probar que $R_{H_0} \in E_M(\mathbb{R})$, solo resta probar que para todo subconjunto K de $\mathbb{R}$, existen números $q \in \mathbb{N}, c > 0$ y $\eta > 0$ tales que

$$\sup_{x\in K} |R_{H_0}(\epsilon, x)| \leqslant c\epsilon^{-q}, \forall \epsilon \in (0, \eta).$$

Pero

$$|R_{H_0}(\epsilon,x)| = \left| \int_{-A(\epsilon)}^{x} R_{\delta_0}(\epsilon,s)\,ds \right| \leqslant \int_{-A(\epsilon)}^{x} |R_{\delta_0}(\epsilon,s)|\,ds$$

y como K es un subconjunto compacto de $\mathbb{R}$, existe un número real $L > 0$ tal que $(x \in K) \Rightarrow (|x| \leqslant L)$, por lo que

$$\sup_{x\in K} \int_{-A(\epsilon)}^{x} |R_{\delta_0}(\epsilon,s)|\,ds \leqslant \int_{-A(\epsilon)}^{L} |R_{\delta_0}(\epsilon,s)|\,ds.$$

Por otro lado, sea $J > 0$; entonces existe $\eta_1 > 0$ tal que si $0 < \epsilon < \eta_1$, entonces $A(\epsilon) < J.$ De manera que si denotamos por M el número $\max(L,J)$ se tiene que

$$\sup_{x\in K} |R_{H_0}(\epsilon,x)| \leqslant \int_{-J}^{M} |R_{\delta_0}(\epsilon,s)|\,ds, \text{ si } 0 < \epsilon < \eta_1.$$

Ahora bien, $R_{\delta_0} \in E_M(\mathbb{R})$; entonces existen números $c_1 > 0, q_1 \in \mathbb{N}$ y $\eta_2 > 0$ para los cuales se cumple que

$$\sup_{s\in[-J,M]} |R_{\delta_0}(\epsilon,s)| \leqslant c_1\epsilon^{-q_1}, \text{ siempre que sea } 0 < \epsilon < \eta_2.$$

Entonces

$$\sup_{s\in[-J,M]} |R_{\delta_0}(\epsilon,s)| \leqslant c_1\epsilon^{-q_1}(M+J), \text{ si } 0 < \epsilon < \min(\eta_1,\eta_2).$$

Tomando ahora $c = c_1(M+J)$, $q = q_1$ y $\eta = \min(\eta_1,\eta_2)$, vemos que, efectivamente, $R_{H_0} \in E_M(\mathbb{R})$.

Por otro lado, obviamente se tienen las igualdades

$$R_{\delta_0}(\epsilon,x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < -A(\epsilon); \\ 1, & \text{si } x > A(\epsilon), \end{cases}$$

mientras que

$$\sup_{\substack{x\in\mathbb{R}\\ \epsilon\in(0,1)}} |R_{H_0}(\epsilon,x)| \leqslant \sup_{\substack{x\in\mathbb{R}\\ \epsilon\in(0,1)}} \int_{-A(\epsilon)}^{x} |R_{\delta_0}(\epsilon,s)|\,ds \leqslant \sup_{\epsilon\in(0,1)} \int_{-\infty}^{+\infty} |R_{\delta_0}(\epsilon,s)|\,ds < +\infty.$$

Por lo tanto, si tomamos H_0 como la función generalizada cuya función representante es $R_{H_0} \in E_M(\mathbb{R})$, entonces hemos obtenido una función generalizada de Heaviside $H_0 \in G_S(\mathbb{R})$, y con esto concluye la demostración de la proposición. ■

Proposición 5.4

El aspecto macroscópico de una función generalizada de **Dirac** $\delta_0 \in G_S(\mathbb{R})$ es la distribución clásica de **Dirac** $\delta \in D'(\mathbb{R})$.

Demostración.

Sea $R_{\delta_0} \in E_M(\mathbb{R})$ una representante arbitraria de una función generalizada de **Dirac** $\delta_0 \in G_S(\mathbb{R})$. Entonces, según la **proposición 5.3** existe una función de Heaviside $H_0 \in G_S(\mathbb{R})$ que tiene una representante $R_{H_0} \in E_M(\mathbb{R})$ definida mediante la fórmula $R_{H_0}(\epsilon, x) = \int\limits_{-A(\epsilon)}^{x} R_{\delta_0}(\epsilon, x)\, dx$ y además $R_{\delta_0}(\epsilon, x) = R'_{H_0}(\epsilon, x)$, para cada valor fijo del parámetro $\epsilon \in (0,1)$. Tomando en consideración esta última afirmación, tenemos para toda función de prueba $\varphi \in D(\mathbb{R})$ la siguiente igualdad

$$\lim_{\epsilon\to 0} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} R_{\delta_0}(\epsilon, x)\, \varphi(x)\, dx = \lim_{\epsilon\to 0} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} R'_{H_0}(\epsilon, x)\, \varphi(x)\, dx =$$

$$= \lim_{\epsilon\to 0} \left[\left[R_{H_0}(\epsilon, x)\, \varphi(x) \right]_{-\infty}^{+\infty} - \int\limits_{-\infty}^{+\infty} R_{H_0}(\epsilon, x)\, \varphi'(x)\, dx \right] =$$

$$= \lim_{\epsilon\to 0} \left[- \int\limits_{-\infty}^{+\infty} R_{H_0}(\epsilon, x)\, \varphi'(x)\, dx \right] =$$

$$= \lim_{\epsilon\to 0} \left[- \int\limits_{0}^{+\infty} \varphi'(x)\, dx \right] = - \left[\varphi(x) \right]_0^{+\infty} = \varphi(0), \forall \varphi \in D(\mathbb{R}).$$

Pero esta es, precisamente, la definición de la distribución de Dirac $\delta \in D'(\mathbb{R})$, ya que, como se recordará, esta distribución se define como la funcional lineal y continua δ sobre el espacio vectorial topológico de las funciones de prueba $D(\mathbb{R})$ tal que $\delta(\varphi) = \varphi(0)$, para toda $\varphi \in D(\mathbb{R})$.

Por consiguiente, lo que hemos demostrado es que para toda función generalizada de Dirac $\delta_0 \in G_S(\mathbb{R})$ se cumple la igualdad

$$\lim_{\epsilon\to 0} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} R_{\delta_0}(\epsilon, x)\, \varphi(x)\, dx = \varphi(0) = \delta(\varphi), \forall \varphi \in D(\mathbb{R}).$$

Luego el aspecto macroscópico de toda función generalizada de Dirac $\delta_0 \in G_S(\mathbb{R})$ es la distribución clásica de Dirac $\delta \in D'(\mathbb{R})$.■

Proposición 5.5

Si δ_1 y δ_2 son funciones generalizadas de Dirac en el álgebra de Colombeau $G_S(\mathbb{R})$, entonces $\delta_1 \sim \delta_2$ y, en consecuencia, ambas tienen el mismo aspecto macroscópico en la distribución de Dirac $\delta \in D'(\mathbb{R})$.

Demostración.

Sean R_{δ_1} y $R_{\delta_2} \in E_M(\mathbb{R})$ unas funciones representativas de las funciones generalizadas de Dirac δ_1 y δ_2 en el álgebra $G_S(\mathbb{R})$. Por la **proposición 5.4** demostrada anteriormente, para ambas funciones generalizadas se cumple que

$$\lim_{\epsilon\to 0}\int_{-\infty}^{+\infty} R_{\delta_1}(\epsilon,x)\,\varphi(x)\,dx = \varphi(0) = \lim_{\epsilon\to 0}\int_{-\infty}^{+\infty} R_{\delta_2}(\epsilon,x)\,\varphi(x)\,dx, \forall\varphi\in D(\mathbb{R}).$$

Luego tenemos la igualdad

$$\lim_{\epsilon\to 0}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[R_{\delta_1}(\epsilon,x) - R_{\delta_2}(\epsilon,x)\right]\varphi(x)\,dx = 0, \forall\varphi\in D(\mathbb{R}),$$

de donde concluimos que $\delta_1 \sim \delta_2$ y, consecuentemente, ambas tienen por aspecto macroscópico la distribución de Dirac $\delta\in D'(\mathbb{R})$.■

Proposición 5.6.

Para toda función generalizada de Heaviside H y toda función generalizada de Dirac δ en el álgebra de Colombeau $G_S(\mathbb{R})$, se verifican las siguientes relaciones de asociación:

1. $H^n \sim H$, para todo número natural n.
2. $H' \sim \delta$.
3. $nH^{n-1}H' \sim H'$, para todo número natural $n \geqslant 1$.

Demostración.

1. Esta relación resulta evidente teniendo en cuenta que si $R_H\in E_M(\mathbb{R})$ es una representante de la función generalizada de Heaviside $H\in G_S(\mathbb{R})$, entonces la función $(R_H)^n\in E_M(\mathbb{R})$ es una representante de la función generalizada H^n y que toda potencia de una función de Heaviside es una función de Heaviside, por tanto en virtud de la **proposición 5.2** ambas funciones generalizadas tienen que ser asociadas.

2. Si $R_H\in E_M(\mathbb{R})$ es una representante de una función generalizada arbitraria $H\in G_S(\mathbb{R})$, entonces R'_H es una función representante de la derivada $H'\in G_S(\mathbb{R})$ y por tanto, si $R_\delta\in E_M(\mathbb{R})$ es una representante de una función generalizada de Dirac arbitraria $\delta\in G_S(\mathbb{R})$ debemos estimar el límite siguiente:

$$\lim_{\epsilon\to 0}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[R'_H(\epsilon,x) - R_\delta(\epsilon,x)\right]\varphi(x)\,dx, \forall\varphi\in D(\mathbb{R}).$$

Ahora bien,

$$\lim_{\epsilon\to 0}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[R'_H(\epsilon,x) - R_\delta(\epsilon,x)\right]\varphi(x)\,dx =$$

$$= \lim_{\epsilon\to 0}\int_{-\infty}^{+\infty} R'_H(\epsilon,x)\,\varphi(x)\,dx - \lim_{\epsilon\to 0}\int_{-\infty}^{+\infty} R_\delta(\epsilon,x)\,\varphi(x)\,dx.$$

Integrando por parte en el primer sumando de la expresión precedente y teniendo en cuenta la **proposición 5.4,** la diferencia entre estos límites es igual a

$$\lim_{\epsilon\to 0}\left(\left[R'_H(\epsilon,x)\,\varphi(x)\right]_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} R_H(\epsilon,x)\,\varphi'(x)\,dx\right) - \varphi(0) =$$

$$= -\lim_{\epsilon\to 0}\int_{-\infty}^{+\infty} R_H(\epsilon,x)\,\varphi'(x)\,dx - \varphi(0) =$$
$$= -\lim_{\epsilon\to 0}\int_{0}^{+\infty} \varphi'(x)\,dx - \varphi(0) =$$
$$= -\left[\varphi(x)\right]_0^{+\infty} - \varphi(0) =$$
$$= \varphi(0) - \varphi(0) = 0.$$

De manera que hemos obtenido el resultado siguiente

$$\lim_{\epsilon\to 0}\int_{-\infty}^{+\infty} \left[R'_H(\epsilon,x) - R_\delta(\epsilon,x)\right]\varphi(x)\,dx = 0, \forall\varphi\in D(\mathbb{R}),$$

lo cual demuestra que $H' \sim \delta$, cualesquiera que sean la función generalizada de Heaviside $H \in G_S(\mathbb{R})$ y la función generalizada de Dirac $\delta \in G_S(\mathbb{R})$.

3. Teniendo en cuenta que la asociación de funciones generalizadas es una relación de equivalencia en $G_S(\mathbb{R})$ compatible con la diferenciación, de la relación $H^n \sim H$ obtenemos $(H^n)' \sim H'$. Pero $(H^n)' = nH^{n-1}H'$, por tanto resulta la relación de asociación $nH^{n-1}H' \sim H'$, cualquiera que sea el número natural $n = 1, 2, 3, ...$ Con esto queda demostrada la propiedad 3. y la **proposición 5.6** ■

Definición 5.3 (Solitones microscópicos generalizados).

Una función feneralizada $\delta_1 \in G_S(\mathbb{R})$ se denomina **solitón microscópico generalizado** si es una combinación lineal de la forma $\delta_1(x) = -1 + H(x) + H(-x), x \in \mathbb{R}$, donde $H \in G_S(\mathbb{R})$ es una función generalizada de Heaviside. Si $R_H \in E_M(\mathbb{R})$ es una función representante arbitraria de la función generalizada de Heaviside $H \in G_S(\mathbb{R})$, entonces una función representante del solitón microscópico generalizado $\delta_1 \in G_S(\mathbb{R})$ es la función $R_{\delta_1} \in E_M(\mathbb{R})$ definida mediante la fórmula

$$R_{\delta_1}(\epsilon,x) = -1 + R_H(\epsilon,x) + R_H(\epsilon,-x), \forall x\in\mathbb{R}, \epsilon\in(0,1).$$

Proposición 5.7

Todo solitón microscópico generalizado $\delta_1 \in G_S(\mathbb{R})$ admite como aspecto macroscópico la distribución generada por la función localmente integrable

$$Sol(x) = \begin{cases} 1, x = 0; \\ 0, x \neq 0. \end{cases},$$

que no es otra que la distribucón nula $\theta \in D'(\mathbb{R})$, definida por la regla $\theta(\varphi) = 0, \forall\varphi \in D(\varphi)$.

Demostración

En efecto, si $R_{\delta_1} \in E_M(\mathbb{R})$ es una representante arbitraria de un solitón microscópico generalizado $\delta_1 \in G_S(\mathbb{R})$, definida mediante la fórmula

$$R_{\delta_1}(\epsilon,x) = -1 + R_H(\epsilon,x) + R_H(\epsilon,-x), \forall x\in\mathbb{R}, \epsilon\in(0,1),$$

donde $H \in G_S(\mathbb{R})$ es una función generalizada de Heaviside, entonces para toda $\varphi \in D(\mathbb{R})$ se debe evaluar el límite

$$\lim_{\epsilon\to 0}\int_{-\infty}^{+\infty} R_{\delta_1}(\epsilon,x)\,\varphi(x)\,dx = \lim_{\epsilon\to 0}\int_{-\infty}^{+\infty} \left(-1+R_H(\epsilon,x)+R_H(\epsilon,-x)\right)\varphi(x)\,dx =$$

$$= \lim_{\epsilon\to 0}\int_{-\infty}^{+\infty} (-1)\,\varphi(x)\,dx + \lim_{\epsilon\to 0}\int_{-\infty}^{+\infty} R_H(\epsilon,x)\,\varphi(x)\,dx + \lim_{\epsilon\to 0}\int_{-\infty}^{+\infty} R_H(\epsilon,-x)\,\varphi(x)\,dx =$$

$$= -\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)\,dx + \int_{0}^{+\infty}\varphi(x)\,dx + \int_{-\infty}^{0}\varphi(x)dx =$$

$$= -\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)\,dx + \int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)\,dx = 0, \forall\varphi\in D(\mathbb{R})\,.\blacksquare$$

Proposición 5.8

Si δ_1 y δ_{12} son dos solitones microscópicos generalizados en $G_S(\mathbb{R})$, entonces están asociados.

Demostración.

En efecto, para representantes arbitrarios $R_{\delta_1}, R_{\delta_{12}} \in E_M(\mathbb{R})$ de los solitones microscópicos δ_1 y $\delta_{12} \in G_S(\mathbb{R})$, para toda función de prueba $\varphi \in D(\mathbb{R})$ se tiene

$$\lim_{\epsilon\to 0}\int_{-\infty}^{+\infty} \left[R_{\delta_1}(\epsilon,x) - R_{\delta_{12}}(\epsilon,x)\right]\varphi(x)\,dx =$$

$$= \lim_{\epsilon\to 0}\int_{-\infty}^{+\infty} \left[\left(-1+R_{H_1}(\epsilon,x)+R_{H_1}(\epsilon,-x)\right) - \left(-1+R_{H_{12}}(\epsilon,x)+R_{H_{12}}(\epsilon,-x)\right)\right]\varphi(x)\,dx,$$

donde R_{H_1} y $R_{12} \in E_M(\mathbb{R})$ son representantes arbitrarios de las funciones generalizadas de Heaviside H_1 y H_{12}, respectivamente. Entonces el límite anterior es igual a

$$\lim_{\epsilon\to 0}\int_{-\infty}^{+\infty} \left[\left(R_{H_1}(\epsilon,x) - R_{H_{12}}(\epsilon,x)\right) + \left(R_{H_1}(\epsilon,-x) - R_{H_{12}}(\epsilon,-x)\right)\right]\varphi(x)\,dx =$$

$$= \lim_{\epsilon\to 0}\int_{-\infty}^{+\infty} \left[\left(R_{H_1}(\epsilon,x) - R_{H_{12}}(\epsilon,x)\right)\right]\varphi(x)\,dx +$$

$$+ \lim_{\epsilon\to 0}\int_{-\infty}^{+\infty} \left(R_{H_1}(\epsilon,-x) - R_{H_{12}}(\epsilon,-x)\right)\varphi(x)\,dx =$$

$$= \int_{0}^{+\infty}\varphi(x)\,dx - \int_{0}^{+\infty}\varphi(x)\,dx = 0, \forall\varphi\in D(\mathbb{R})\,.\blacksquare$$

Observación 5.2

Debe notarse que, aunque el aspecto macroscópico de un solitón microscópico generalizado sea la distribución nula $\theta \in D'(\mathbb{R})$, un solitón microscópico generalizado, en general, es un elemento no nulo del álgebra $G_S(\mathbb{R})$. El estudiante debería reflexionar sobre esta afirmación, teniendo en cuenta que la función generalizada nula en $G_S(\mathbb{R})$ tiene por función representativa un elemento cualquiera del ideal $N(\mathbb{R})$ de las funciones nulas o despreciables de dicha álgebra.

Observación 5.3

Puesto que existen infinitas funciones generalizadas de Heaviside, también existen infinitos solitones microscópicos generalizados (todos los cuales tienen "altura" igual a 1). Tamgién es obvio que el producto $f.\delta_1$ de una función $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ por un solitón microscópico generalizado $\delta_1 \in G_S(\mathbb{R})$ es una función generalizada que podemos considerar también un solitón microscópico generalizado (de altura variable, igual a $f(0)$). En particular, el producto de una constante $k \in \mathbb{R}$ por un solitón microscópico generalizado $\delta_1 \in G_S(\mathbb{R})$ es un solitón microscópico generalizado de altura igual a k, que denotaremos por $\delta_k = k\delta_1$.

Pregunta de control.

¿Forman los solitones microscópicos generalizados una subálgebra del álgebra de las funciones generalizadas de Colombeau sobre la recta?

Ejercicio.

Demostrar que si $\delta_1 \in G_S(\mathbb{R})$ es un solitón microscópico generalizado, entonces $\delta_1^2 \sim \delta_1$ y, en general, $\delta_1^n \sim \delta_1$, para todo número natural $n \geqslant 2$.

Definición 5.4. **(Solitones escaleras generalizados).**

Dado un número real $\tau_1 > 0$, se denomina **solitón escalera generalizado** una función generalizada $S_{\tau_1} \in G_S(\mathbb{R})$ que tiene una función representativa $R \in E_M(\mathbb{R})$ definida mediante la fórmula

$R_{S_{\tau_1}}(\epsilon, x) = R_H(\epsilon, x + \tau_1) - R_H(\epsilon, x - \tau_1), \forall x \in \mathbb{R}, \epsilon \in (0,1),$

donde $R_H \in E_M(\mathbb{R})$ es una función representativa cualquiera de una función generalizada de Heaviside $H \in G_S(\mathbb{R})$.

Observación 5.4.

De la **definición 5.4** obviamente obtenemos la fórmula $S_{\tau_1}(x) = H(x + \tau_1) - H(x - \tau_1), \forall x \in \mathbb{R}$. Note que el aspecto macroscópico de esta función generalizada no tiene una representación gráfica necesariamente simétrica con respecto al eje. También se comprende fácilmente que el valor máximo de cualquier representante de un solitón escalera generalizado S_{τ_1} es igual a 1. Obviamente, el producto de una función $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ por un solitón escalera generalizado S_{τ_1} también es una función generalizada del álgebra $G_S(\mathbb{R})$; en particular, las funciones generalizadas $kS_{\tau_1} \in G_S(\mathbb{R})$, donde $k \in \mathbb{R}$, son solitones escalera generalizados del mismo tipo (pero su valor máximo, que llamaremos también su "altura" es igual a $|k|$.

Pregunta de control.

¿Forman los solitones escalera generalizados una subálgebra del álgebra de las funciones generalizadas de Colombeau sobre la recta?

Proposición 5.9

Dos solitones escalera generalizados S_{τ_1} y S_{τ_2} estan asociados.

Demostración.

En efecto, si denotamos por $R_{S_{\tau_1}}$ y $R_{S_{\tau_2}}$ dos funciones representativas cualesquiera de los solitones escaleras generalizados S_{τ_1} y S_{τ_2}, respectivamente, donde $\tau_1 > 0$ y $\tau_2 > 0$ son números reales prefijados, entonces cualquiera que sea la función de prueba $\varphi \in D(\mathbb{R})$, se tiene

$$\lim_{\epsilon\to 0}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[R_{S_{\tau_1}}(\epsilon,x) - R_{S_{\tau_2}}(\epsilon,x)\right]\varphi(x)\,dx =$$

$$= \lim_{\epsilon\to 0}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\begin{array}{c}(R_{H_1}(\epsilon,x+\tau_1) - R_{H_1}(\epsilon,x-\tau_1)) - \\ -(R_{H_2}(\epsilon,x+\tau_1) - R_{H2}(\epsilon,x-\tau_1))\end{array}\right]\varphi(x)\,dx =$$

$$= \lim_{\epsilon\to 0}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[R_{H_1}(\epsilon,x+\tau_1) - R_{H_2}(\epsilon,x+\tau_1)\right]\varphi(x)\,dx -$$

$$-\lim_{\epsilon\to 0}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[R_{H_1}(\epsilon,x-\tau_1) - R_{H_2}(\epsilon,x-\tau_1)\right]\varphi(x)\,dx =$$

$$= 0 - 0 = 0.$$

ya que las funciones generalizadas de Heaviside H_1 y H_2 están asociadas.■

Proposición 5.10

$S_{\tau_1}^2 \sim S_{\tau_1}$.

Demostración.

Si una representante arbitraria de la función generalizada es la función $R_{S_{\tau_1}} \in E_M(\mathbb{R})$, entonces $R^2_{S_{\tau_1}}$ es una representante de la función generalizada $S^2_{\tau_1} \in G_S(\mathbb{R})$. Pero $R_{S_{\tau_1}}$ es una función de la forma $R_{S_{\tau_1}}(\epsilon,x) = R_H(\epsilon,x+\tau_1) - R_H(\epsilon,x-\tau_1)$, luego $R^2_{S_{\tau_1}}(\epsilon,x) = R^2_H(\epsilon,x+\tau_1) - 2R_H(\epsilon,x+\tau_1)R_H(\epsilon,x-\tau_1) + R^2_H(\epsilon,x-\tau_1)$. Por consiguiente, para toda función de prueba $\varphi \in D(\mathbb{R})$ se tiene

$$\lim_{\epsilon\to 0}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[R^2_{S_{\tau_1}}(\epsilon,x) - R_{S_{\tau_1}}(\epsilon,x)\right]\varphi(x)\,dx =$$

$$= \lim_{\epsilon\to 0}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\begin{array}{c}R^2_H(\epsilon,x+\tau_1) - 2R_H(\epsilon,x+\tau_1)R_H(\epsilon,x-\tau_1) + \\ +R^2_H(\epsilon,x-\tau_1) - R_H(\epsilon,x+\tau_1) + R_H(\epsilon,x-\tau_1)\end{array}\right]\varphi(x)\,dx =$$

$$= \int_0^{+\infty}\varphi(x+\tau_1)\,dx - 2\int_{-\infty}^{+\infty}R_H(\epsilon,x+\tau_1)R_H(\epsilon,x-\tau_1)\varphi(x)\,dx +$$

$$+ \int_0^{+\infty}\varphi(x-\tau_1)\,dx - \int_0^{+\infty}\varphi(x+\tau_1)\,dx + \int_0^{+\infty}\varphi(x-\tau_1)\,dx =$$

$$= -2\int_{-\infty}^{+\infty}R_H(\epsilon,x+\tau_1)R_H(\epsilon,x-\tau_1)\varphi(x)\,dx + 2\int_0^{+\infty}\varphi(x-\tau_1)\,dx =$$

$$= -2 \int\limits_{-A(\epsilon)}^{+A(\epsilon)} R_H(\epsilon, x+\tau_1) R_H(\epsilon, x-\tau_1) \varphi(x)\, dx + 2 \int\limits_{0}^{+\infty} \varphi(x)\, dx = 0,$$

En consecuencia, la función generalizada $S_{\tau_1}^2$ está asociada con S_{τ_1}.■

Ejercicio.

Ejercicio.

Dados los números reales $\tau_1 > 0$ y $c > 0$, demostrar que son válidas las siguientes relaciones de asociación:

1) $S_{\tau_1}(x-ct)\, S'_{\tau_1}(x+ct) \sim 0$;
2) $S_{\tau_1}(x+ct)\, S'_{\tau_1}(x-ct) \sim 0$;
3) $S'_{\tau_1}(x-ct)\, .\delta_1(x)$;
4) $S'_{\tau_1}(x+ct)\, .\delta_1(x)$,

donde $\delta_1(x)$ es un solitón microscópico generalizado.

6. REGLAS DE CÁLCULO CON ESTAS FUNCIONES GENERALIZADAS.

En el cálculo con las funciones generalizadas juega un importante papel la asociación de dichas funciones, sobre todo cuando tratamos de investigar las soluciones generalizadas de los sistemas de leyes de conservación. En efecto, si por ejemplo intentamos buscar una solución singular o generalizada para una ley de conservación escalar de la forma $u_t + f'(u)\, u_x = 0$, cuyo fluyo f es un campo vectorial suave sobre la recta $\mathbb{R}^1$, entonces lo que tratamos de hallar es una función generalizada $u(t,x)$ en el espacio de las funciones generalizadas $G_S(\mathbb{R}^2)$ (o al menos en $G_S(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$, ya que en las aplicaciones la variable t juega el papel del tiempo y normalmente se considera que $t \geqslant 0$, donde las restricciones a estl semiplano de las funciones generalizadas sobre $\mathbb{R}^2$ se definen de manera natural) que al ser remplazada en lugar de la variable u que figura en la ecuación de dicha ley de conservación, satisfaga la relación de asociación $u_t + f'(u)\, u_x \sim 0$.

En los calculos que aparecerán al operar con dichas funciones generalizadas, de manera natural se hará necesario sustituir sus derivadas y sus productos de distinas funciones genralizadas, muchas de las cuales son ejemplos de los que hemos considerado anerirmente, como las funciones generalizadas de Dirac, Heaviside, solitones microscópicos generalizados o solitones escaleras generalizados. Al operar con dichas funciones genralizadas es tener presente que la multiplicación de funciones generalizadas no es compatible con la relación de equivalencia de la asociación, si bien los operadores de diferenciación son estables para dicha relación de equivalencia y el producto de una función suave por una función generalizada está siempre definido como una función generalizada.

Teniendo en cuenta estas considraciones, podemos pasar a la última conferencia de nuestro cursillo, en la cual desarrollaremos los ejemplos de aplicación de esta teoría a algunas leyes de conservación conocidas, lo que servirá de modelo para otras aplicaciones de mayor complejidad y envergadura.