Programa de Pós-Graduação em Modelagem Computacional em Ciência e Tecnologia - UFF 15/10/2014.

PROJETOS DE INTERNACIONALIZAÇÃO DA UFF – PIUFF 2014: INSERÇÃO INTERNACIONAL DO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO MODELAGEM COMPUTACIONAL EM CIÊNCIA E TECNOLOGIA.

PROFESSOR DR. BALDOMERO VALIÑO ALONSO, UNIVERSIDAD DE LA HABANA, CUBA.

CONFERENCIA N^o 4:

UTILIZACIÓN DE LAS ÁLGEBRAS DIFERENCIALES PARA LA DETERMINACÓN APROXIMADA DE LAS SOLUCIONES SINGULARES DE SISTEMAS HIPERBÓLICOS DE LEYES DE CONSERVACIÓN.

1. RECORDATORIO DE LAS PROPIEDADES FUNDAMENTALES DE LAS SOLUCIONES SINGULARES.

En la última conferencia del curso aplicaremos las álgebras diferenciales de Colombeau a la búsqueda de soluciones singulares aproximadas de las leyes de conservación. Nos limitaremos al estudio del caso de las ondas de choque, pero similares procedimientos se pueden utilizar para otros tipos de soluciones singulares. Una ley de conservación modélica en cierto sentido es la ecuación de Burguers, de la cual ya hemos dado varios ejemplos de problemas de Cauchy en la primera conferencia de este cursillo.

Como ya comentábamos en la primera conferencia, la importancia práctica de las soluciones singulares de los sistemas hiperbólicos de leyes de conservación ha sido puesta de manifiesta por varios autores. En particular, V. P. Máslov, quien les prestó atención desde la década de los años 70 del pasado siglo, al estudiar las ondas de choque en los gases isoentrópicos no viscosos y con viscosidad pequeña, ha subrallado algunas propiedades que dichas soluciones pueden tener en el caso de sistemas de ecuaciones cuasilineales hiperbólicas, de las cuales llegó a conjeturar que era posible predecir la trayectoria de un huracán calculando la trayectoria de las singularidades de una solución de ese tipo en el sistema de ecuaciones que se utilizan para describir la dinámica de tales fenómenos.

Para fijar las ideas, nos concentraremos en el estudio de las leyes de conservación de la forma

$$u_t + (f(u))_x = 0, \qquad (1.1)$$

donde $u = u(t,x)$ es una función definida en el producto $\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_x$ y que toma sus valores en el espacio euclidiano $m-$dimensional $\mathbb{R}^m$, espacio en el cual toman sus valores los diferentes estados $u_1(t,x), u_2(t,x), ..., u_m(t,x)$ que describen determinado fenómeno. En realidad, nos van a interesar fundamentalmente estos valores para $t \geqslant 0$, ya que la varialbe t en todos los casos representará el **tiempo,** mientras que los estados $u_1(t,x), u_2(t,x), ..., u_m(t,x)$ son distintas magnitudes físicas que están siendo analizadas con la ayuda del sistema de ecuaciones (1.1).

Siguiendo a V. P. Maslov, diremos que $u(t,x)$ es una **solución singular** del sistema (1.1), que puede ser tanto una función escalar o vectorial (según se trate de una ecuación escalar o un verdadero sistema de ecuaciones de los cuales no interesa precisar la expresión particular de sus ecuaciones), si es una función de la forma

$$u(t,x) = f(S(t,x), t, x) \qquad (1.2)$$

donde $f : \mathbb{R}_\tau \times \mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_x \to \mathbb{R}^m$ es una aplicación suave en todo su dominio, excepto en el hiperplano $\tau = 0$ del espacio tridimensional $\mathbb{R}_\tau \times \mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_x$ y

$S : \mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_x \to \mathbb{R}$ es una aplicación suave (aquí m es el número de estados o lo que es igual, el número de ecuaciones del sistema (4.1)).

El subconjunto de $\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_x$ formado por los puntos $(t, x) \in \mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_x$ tales que $S(t, x) = 0$ constituye el conjunto de los puntos singulares de la solución $u(t, x)$. Estas singularidades pueden ser de diverso tipo:

1) si es una discontinuidad de primer orden, entonces obtenemos una **onda de choque**.

2) si f es continua y una vez diferenciable, entonces tenemos **discontinuidades débiles** y **singularidades de tipo vórtice.**

Las soluciones singulares del tipo (1.2) tienen importantes propiedades:

1) **"Autosimilaridad estructural".** Esto significa que si en el instante t_0 estas soluciones tienen la forma (3.1) con una dependencia dada con respecto a τ, entonces esta dependencia con respecto a τ se conserva para todo $t > t_0$, al menos en intervalos no muy grandes $[t_0, t]$.

2) **"Estabilidad estructural".** Esto significa que una pequeña variación de $S(x, t_0)$ o $f(\tau, x, t_0)$, la cual no cambia la estructura de la singularidad de f con respecto a τ ni la estructura de los coeficientes en la ecuación original, tampoco cambia la forma ni la estructura de la función $u(t, x)$. Lo anterior significa, por ejemplo, que si en el ejemplo de las soluciones ondas de choque o los solitones infinitamente estrechos, para un valor dado $t = t_0$ remplazamos ls funciones $A(t_0, x), B(t_0, x)$ y el número $X(t_0)$ por otras funciones $A_1(t_0, x), B_1(t_0, x)$ y otro número $X_1(t_0)$ que difieran poco de los anteriores, entonces la estructura de la onda de choque (o el solitón infinitamente estrecho) no cambia.

3) Estas soluciones pueden ser descritas mediante un sistema infinito de ecuaciones diferenciales ordinarias, cuyas soluciones son los coeficientes de un desarrollo asintótico formal suave que corresponde a la solición singular de que se trate. Por ejemplo en el caso de una onda de choque $u(t, x) = A(t, x) + B(t, x) H(x - X(t))$ de una ecuación escalar del tipo (1.1) ese desarrollo asintótico formal tiene la forma

$$u(t, x) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k(t) (x - X(t))^k + \left(\sum_{k=0}^{\infty} B_k(t) (x - X(t))^k \right) .H(x - X(t)). \tag{1.3}$$

Los coeficnentes A_k y B_k ,$k = 0, 1, 2, ...$, de este desarrollo y la función X, cuyos ceros describen la trayectoria de los puntos singulares de la solución, son funciones suaves de la variable $t \in \mathbb{R}$. Concretamente, estos coeficientes se definen como los coeficientes del desarrollo de Taylor de las funciones $A : \mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_x \to \mathbb{R}$ y $B : \mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_x \to \mathbb{R}$ en la vecindad de cada uno de los puntos singulares $(t, X(t))$ de la solución, o sea:

$$A_k(t) = \frac{1}{k!} \frac{\partial^k A}{\partial x} (t, X(t)); \; B_k(t) = \frac{1}{k!} \frac{\partial^k B}{\partial x} (t, X(t)), k = 0, 1, 2, 3, ...$$

La importancia de esta propiedad radica en que ella es la que nos da la posibilidad de obtener aproximaciones de la solución singular buscada, mediante el truncamiento del desarrollo asintótico formal de dicha solución.

Es importante destacar nuevamente que en las leyes de conservación hiperbólicas de **"posición general",** las soluciones con las propiedades descritas anteriormente anteriormente a lo sumo existen en un número finito para cada ley de conservación dada. Esto no significa que no puedan existir soluciones singulares de otros tipos más complicados, pero desaparecen rápidamente bajo el efecto de las perturbaciones que actúan sobre el sistema.

En esta conferencia presentaremos ejemplos de soluciones singulares que suelen aparecer en las leyes de conservación escalar, de las cuales la ecuación de Burguers es el modelo típico. Iguales procedimientos se pueden aplicar en casos de sistemas de un mayor número de ecuaciones, por ejemplo, en el sistema de ecuaciones de "shallow water", pero en cada caso será necesario analizar la manera de definir las funciones generalizadas utilizadas y las propiedades de asociación que tienen sus productos, potencias y otros tipos de operaciones no lineales, ya que en cada ley de conservación concreta suelen intervenir distintas expresiones funcionales, lo cual puede generar la investigación de propiedades interesantes, al margen de su importancia para la aplicación concreta que se esté realizando.

Por ejemplo, la ecuación de Bucley-Leverett que tantas aplicaciones ha tenido en la industria del petróleo, presenta la forma $u_t + (F(u))_x = 0$, donde F es la función definida mediante la fórmula $F(u) = \dfrac{\dfrac{u^2}{\mu_1}}{\dfrac{u^2}{\mu_1} + \dfrac{(1-u)^2}{\mu_2}} = \dfrac{u^2}{u^2 + \mu(1-u)^2}$, en la cual los parámetros μ_1 y μ_2 representan la viscosidad de dos fluidos en un medio poroso y $\mu = \dfrac{\mu_1}{\mu_2}$. La ecuación de Buckley –Leverett también puede escribirse en la forma $u_t + F\prime(u)u_x = 0$, donde $F\prime(u) = \dfrac{2\mu u(1-u)}{\left(u^2 + \mu(1-u)^2\right)^2}$. Se trata, por tanto, de una ley de conservación cuyo flujo es una fracción racional, lo cual genera una serie de complicaciones al aplicar estas consideraciones al estudio de sus soluciones singulares (ondas de choque, ondas de rarefacción y otros tipos de ondas que tienen gran importancia en las aplicaciones y han sido estudiada con otros recursos por gran número de investigadores). Esas complicaciones deben ser resueltas antes de poder aplicar las ventajas del truncamiento del desarrollo asintótico formal para obtener aproximaciones de dichas soluciones y es necesario establecer la comparación con los resultados que hayan sido obtenidas por otras vías para justificar plenamente las ventajas de este método.

2. DEFINICIÓN DE LA CADENA DE HUGONIOT MÁSLOV DE UNA SOLUCIÓN SINGULAR DE UNA LEY DE CONSERVACIÓN ESCALAR.

Supongamos que se tiene una ley de conservación

$$u_t + F'(u)\,u_x = 0, \qquad (2.1)$$

cuyo flujo $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ es una función suave (de clase C^{∞}), y estamos investigando la existencia de soluciones singulares de algún tipo (por ejemplo, ondas de choque o solitones microscópicos generalizados). En lugar de ello, buscamos una función generalizada $U\in G_S(\mathbb{R})$ que satisfaga la siguiente **relación de asociación**

$$U_t + F'(U)\,U_x \sim 0. \tag{2.2}$$

Por ejemplo, si U es una función generalizada que modela una **onda de choque,** entonces debe buscarse en la forma

$$u(t,x) = A(t,x) + B(t,x)\,H(x - X((t))), \tag{2.3}$$

donde $A:\mathbb{R}_t\times\mathbb{R}_x\to\mathbb{R}$ y $B:\mathbb{R}_t\times\mathbb{R}_x\to\mathbb{R}$ son funciones suaves (al menos en regiones contenidas en sus dominios de definición) y $H\in G_S(\mathbb{R})$ es una **función generalizada de Heaviside.**

De la misma manera, si U es una función generalizada que modela un **solitón infinitamente estrecho,** entonces debe buscarse en la forma

$$u(t,x) = A(t,x) + B(t,x)\,\delta_1(x - X((t))), \tag{2.4}$$

donde, como antes, A y B son funciones suaves en un abierto contenido en el plano $\mathbb{R}_t\times\mathbb{R}$ y $\delta_1\in G_S(\mathbb{R})$ es algún **solitón microscópico generalizado.**

El procedimiento de trabajo consiste en sustituir ests expresiones en el primer miembro de la ley de conservación dada, para lo cual necesitamos calcular las expresiones concretas que adopten las derivadas parciales U_t y U_x, la evaluación de F' en la función generalizada propuesta y la multiplicación de la función generalizada $F\prime(U)$ por la función generalizada $U\in G_S(\mathbb{R})$, para luego sumar el producto obtenido con U_t para imponer la condición de que la función generalizada U, resultante de dichas operaciones, satisfaga la relación de asociación (2.2).

Por ejemplo en el caso de una onda de choque (2.3) obtenemos

$$\left\{\begin{array}{c} u_t(t,x) = A_t(t,x) + B_t(t,x)\,H(x - X((t))) + (-X')\,B(t,x)\,\delta(x - X((t))) \\ u_x(t,x) = A_x(t,x) + B_x(t,x)\,H(x - X((t))) + B(t,x)\,\delta(x - X((t))) \end{array}\right., \tag{2.5}$$

donde δ es la **función generalizada de Dirac** tal que $H\prime=\delta$. La evaluación de F' en U y la sustitución de estas expresiones en el primer miembro de la ecuación (2.1) nos conduce a una expresión que adopta la forma $\mathbf{A}(t,x)+\mathbf{B}(t,x)\,H(\tau)+\mathbf{C}(t,x)\,\delta(\tau)$, en la que $\mathbf{A}(t,x)$, $\mathbf{B}(t,x)$ y $\mathbf{C}(t,x)$ son el resultado de agrupar los términos semejantes que figuran como factores comunes a las funciones generalizadas $1, H$ y δ después de los cálculos algebraicos realizados (en las cuales aparecen las derivadas parciales de las funiciones A y B de la expresión propuesta para la solución singular. Entonces se impone a esta expresión la condición de satisfacer la relación de asociación siguiente:

$\mathbf{A}(t,x) + \mathbf{B}(t,x)\,H(\tau) + \mathbf{C}(t,x)\,\delta(\tau) \sim 0,$ en la que $\tau = x - X(t)\,,$ para todo $t \in \mathbb{R}.$ $\quad(2.6)\,.$

La sustitución de funciones generalizadas que satisfagan el sistema de ecuaciones (en derivadas parciales de primer orden)

$$\begin{cases} \mathbf{A}(t,x) = 0; \\ \mathbf{B}(t,x) = 0; \\ \mathbf{C}(t,x) = 0, \end{cases} \qquad (2.7)$$

obviamente, es una **condición suficiente** para obtener una función generalizada que satisfaga la relación de asociación. En el trabajo [1] fue obtenida una **condición necesaria** que posibilita la obtención de la cadena de Hugotiot-Máslov asociada a una onda de choque en una ley de conservación con flujo polinomial. Sin embargo, en el caso de un solitón infinitamente estrecho no tiene lugar un teorema semejante, ya que el aspecto macroscópico de todo solitón microscópico generalizado es la distribución nula.

Cuando en la expresión de la solución singular propuesta ((2.3) para una onda de choque o (2.4) para un solitón infinitamente estrecho) se sustituyen las funciones $A(t,x)$ y $B(t,x)$ por sus desarrollos asintóticos formales y luego estos son llevados a las ecuaciones (2.7), se obtienen automáticamente las ecuaciones difereciales ordinarias que deben satisfacer las funciones X, A_k y $B_k, k = 0,1,2,3,...$ para que esos desarrollos asintóticos tengan lugar.

Estas ecuaciones diferenciales ordinarias las funciones incógnitas X, A_k y B_k, conforman una verdadera **cadena** de ecuaciones diferenciales, ya que si se trunca dicho sistema en un valor prefijado $k = K$, entre estas ecuaciones figuran comúnmente incógnitas de órdenes superiores a K (por ejemplo, $K+1, K+2$ o $K+3$) por lo que el sistema truncado resulta ser **indeterminado, ya que tiene más incógnitas que ecuaciones.** El sistema infinito de ecuaciones diferenciales ordinarias en las funciones incógnitas X, A_k y $B_k, k = 0,1,2,3,.$ recibe el nombre de **cadena de Hugoniot-Máslov** correspondiente a la solución singular cuyo desarrollo asintótico formal es

$$u(t,x) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k(t)\,(x - X(t))^k + \left(\sum_{k=0}^{\infty} B_k(t)\,(x - X(t))^k\right) H(x - X((t)))\,, \qquad (2.3)$$

en el caso de una onda de choque, o bien

$$u(t,x) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k(t)(x - X(t))^k + \left(\sum_{k=0}^{\infty} B_k(t)(x - X(t))^k\right)\delta_1(x - X((t))),$$
(2.3)

para un solitón infinitamente estrecho.

3. OBTENCIÓN DE LA CADENA DE HUGONIOT-MÁSLOV DE UNA ONDA DE CHOQUE EN LA ECUACIÓN DE BURGUERS.

Resulta muy instructivo aplicar este método para determinar las ondas de choque que puede tener la ecuación de Burguers

$$u_t + u.u_x = 0. \qquad (3.1)$$

Con este objetivo, busquemos una funcion generalizada $u(t,x) \in G_S(\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_x)$ que tenga la forma

$$u(t,x) = A(t,x) + B(t,x)H(x - X((t))), \qquad (2.3)$$

en la que A y B son funciones de la clase C^∞ definidas sobre $\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_x$ y con valores en $\mathbb{R}$, la segunda de ellas nunca nula en $\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_x$, tal que se satisfaga la relación de asociación

$$u_t + u.u_x \sim 0. \qquad (3.2)$$

Para esta función generalizada proponemos un desarrollo asintótico formal de la forma

$$u(t,x) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k(t)(x - X(t))^k + \left(\sum_{k=0}^{\infty} B_k(t)(x - X(t))^k\right).H(x - X(t)).$$
(1.3)

Trabajando primero con la expresión (2.3) obtenemos

$$\begin{cases} u_t(t,x) = A_t(t,x) + B_t(t,x)H(x - X((t))) + (-X')B(t,x)\delta(x - X((t))) \\ u_x(t,x) = A_x(t,x) + B_x(t,x)H(x - X((t))) + B(t,x)\delta(x - X((t))) \end{cases}$$
(2.5)

por lo que, al sustituir en el primer miembro de la ecuación, obtenemos:

$$\begin{aligned} &(A_t + B_tH(\tau) - X'B\delta(\tau)) + \\ &+ (A + B.H(\tau)).(A_x + B_xH(\tau) + B\delta(\tau)) = \\ &= (A_t + B_tH(\tau) - X'B\delta(\tau)) + \\ &+ \left(\begin{array}{c} A.A_x + A.B_xH(\tau) + \\ A.B\delta(\tau) + B.A_xH(\tau) + B.B_xH^2(\tau) + B^2H(\tau)\delta(\tau) \end{array}\right) = R, \end{aligned}$$

donde hemos omitido los argumentos x, t pero hemos mantenido la expresión $\tau = x - X(t)$.

Resulta que

$$H^2(\tau) \sim H(\tau) \text{ y } H(\tau)\,\delta(\tau) \sim \frac{1}{2}\delta(\tau).$$

Por consiguiente,

$$\begin{array}{l} R = (A_t + B_t H(\tau) - X' B\delta(\tau)) + \\ + \left(\begin{array}{c} A.A_x + A.B_x H(\tau) + A.B\delta(\tau) + \\ +B.A_x H(\tau) + B.B_x H^2(\tau) + B^2 H(\tau)\,\delta(\tau) \end{array} \right) \sim \\ \sim (A_t + A.A_x) + \\ + (B_t + A.B_x + +B.A_x + B.B_x)\,H(\tau) + \\ + \left(-X'B + A.B + \frac{1}{2}B^2 \right)\delta(\tau). \end{array}$$

Necesitamos encontrar una función generalizada del tipo (2.3) tal que se cumpla la relación de asociación

$$\begin{array}{l} (A_t + A.A_x) + \\ + (B_t + A.B_x + B.A_x + B.B_x)\,H(\tau) + \\ + \left(-X'B + A.B + \frac{1}{2}B^2 \right)\delta(\tau) \sim 0. \end{array}$$

Si denotamos los coeficientes de las funciones generalizadas $1, H(\tau)$ y $\delta(\tau)$ por $\mathbf{A}(t,x), \mathbf{B}(t,x)$ y $\mathbf{C}(t,x)$, respectivamente, entonces la relación precedente se escribe más sencillamente

$$\mathbf{A}(t,x).1 + \mathbf{B}(t,x).H(\tau) + \mathbf{C}(t,x).\delta(\tau) \sim 0. \tag{3.3}$$

Una condición suficiente para que una función generalizada (2.3) satisfaga la relación de asociación (2.3) es que las funciones $A(t,x)$ y $B(t,x)$ satisfagan el sistema de ecuaciones

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{A}(t,x) = 0; \\ \mathbf{B}(t,x) = 0; \\ \mathbf{C}(t,x) = 0, \end{array} \right. \tag{3.4}$$

o, lo que es equivalente, el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\left\{ \begin{array}{c} A_t + A.A_x = 0; \\ B_t + A.B_x + B.A_x + B.B_x; \\ -X'B + A.B + \frac{1}{2}B^2 = 0. \end{array} \right. \tag{3.5}$$

Como la función $B(t,x)$ nunca es nula en su dominio de definición, en la tercera de las ecuaciones del sistema precedente podemos dividir por B, con lo cual obtenemos el sistema equivalente

$$\begin{cases} A_t + A.A_x = 0; \\ B_t + A.B_x + B.A_x + B.B_x = 0; \\ -X' + A + \dfrac{1}{2}B = 0. \end{cases} \tag{3.6}$$

La tercera de las ecuaciones del sistema (3.6) describe la trayectoria de la singularidad de la solución (2.3).

Ahora bien, hemos propuesto desarrollos asintóticos formales para las dos funciones A y B, los cuales deben ser sustituidos en el miembro derecho de la ecuación de la singularidad,

$$\begin{cases} A(t,x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} A_k(t) \,.\, (x - X(t))^k ; \\ B(t,x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} B_k(t) \,.\, (x - X(t))^k , \end{cases} \tag{3.7}$$

por tanto la ecuación queda

$$\begin{aligned} X' &= A + \frac{1}{2}B = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} A_k(t)\,.\,(x - X(t))^k + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty} B_k(t)\,.\,(x - X(t))^k = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\left(A_k(t) + \frac{1}{2}B_k(t)\right).\,(x - X(t))^k = \\ &= A_0(t) + \frac{1}{2}B_0(t)\,. \end{aligned}$$

De manera que la primera ecuación de la cadena de Hugoniot-Máslov es la que nos describe la trayectoria de la singularidad (la ecuación que debe satisfacer la incógnita X) y se escribe en la forma

$$X' = A_0(t) + \frac{1}{2}B_0(t)\,. \tag{3.8}$$

.

Para encontrar las ecuaciones que deben satisfacer las incógnidas A_k y B_k, $k = 0, 1, 2, 3, ...$ necesitamos sustituir los desarrollos asintóticos de las funciones A y B en la primera y la segunda de las ecuaciones del sistema (3.6).

Notemos que la primera de las ecuaciones es, precisamente, la misma ecuación de Burguers. Esto nos dice que la parte "suave" de la solución singular debe ser una solución clásica $A(t,x)$ de la ecuación de Burguers (3.1).

Por otra parte, las derivadas con respecto a t y a x de los desarrollos asintóticos formales (3.6) se obtienen rápidamente derivando término a término ambas series:

$$A_t = \sum_{k=0}^{\infty} A_k'.\,(x - X(t))^k +$$

$$
\begin{aligned}
&+\sum_{k=0}^{\infty} k\left(-X'\right) A_k.\left(x - X(t)\right)^{k-1} = \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} A_k'.\left(x - X(t)\right)^{k} + \\
&+\sum_{k=0}^{\infty} (k+1)\left(-X'\right) A_{k+1}.\left(x - X(t)\right)^{k} = \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\left(A_k' - (k+1)\left(A_0 + \frac{1}{2}B_0\right) A_{k+1}\right)\left(x - X(t)\right)^{k};
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
A_x &= \left(\sum_{k=0}^{\infty} A_k.(t)\left(x - X(t)\right)^{k}\right)_x = \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} k A_k\left(x - X(t)\right)^{k-1} = \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) A_{k+1}\left(x - X(t)\right)^{k} \;;
\end{aligned}
$$

Por tanto, sustituyendo estas expresiones en la primera de las ecuaciones del sistema (3.5) , obtenemos

$$A_t + A.A_x = 0;$$

$$
\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{\infty}\left(A_k' - (k+1)\left(A_0 + \frac{1}{2}B_0\right) A_{k+1}\right)\left(x - X(t)\right)^{k} + \\
&+\left(\sum_{k=0}^{\infty} A_k(t).\left(x - X(t)\right)^{k}\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty}(k+1) A_{k+1}\left(x - X(t)\right)^{k}\right) = 0;
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{\infty}\left(A_k' - (k+1)\left(A_0 + \frac{1}{2}B_0\right) A_{k+1}\right)\left(x - X(t)\right)^{k} + \\
&+\sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{l=0}^{k}(l+1) A_{k-l}A_{l+1}.\right)\left(x - X(t)\right)^{k} = 0 \\
&\sum_{k=0}^{\infty}\left(\begin{array}{c} A_k' - (k+1)\left(A_0 + \frac{1}{2}B_0\right) A_{k+1} + \\ + \left(\sum_{l=0}^{k}(l+1) A_{k-l}A_{l+1}.\right)\end{array}\right)\left(x - X(t)\right)^{k} = 0.
\end{aligned}
$$

Por tanto las ecuaciones para las funciones incógnitas A_k son las siguientes:

$$A_k' - (k+1)\left(A_0 + \frac{1}{2}B_0\right) A_{k+1} + \left(\sum_{l=0}^{k} (l+1)\, A_{k-l}A_{l+1}.\right) = 0;$$

o sea:

$$A_k' = (k+1)\left(A_0 + \frac{1}{2}B_0\right) A_{k+1} -$$
$$- \left(\sum_{l=0}^{k} (l+1)\, A_{k-l}A_{l+1}.\right), \quad k = 0, 1, 2, 3, ...$$

Por otra parte, para las ecuaciones de las funciones incógnitas B_k necesitamos las derivadas parciales del desarrollo asintótico formal de la función B,

$$B_t = \sum_{k=0}^{\infty} \left(B_k' - (k+1)\left(A_0 + \frac{1}{2}B_0\right) B_{k+1}\right)(x - X(t))^k ;$$
$$B_x = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)\, B_{k+1}\,(x - X(t))^k .$$

Por tanto, sustituyendo ahora en la segunda de las ecuaciones del sistema (3.5), tenemos:

$B_t + A.B_x + B.A_x + B.B_x = 0;$

$B_t + (A+B)\, B_x + B.A_x = 0;$

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} \left(B_k' - (k+1)\left(A_0 + \frac{1}{2}B_0\right) B_{k+1}\right)(x - X(t))^k\right) +$$
$$+ \left(\sum_{k=0}^{\infty} (A_k + B_k)\,(x - X(t))^k\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} (k+1)\, B_{k+1}\,(x - X(t))^k\right) +$$
$$+ \left(\sum_{k=0}^{\infty} B_k\,(x - X(t))^k\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} (k+1)\, A_{k+1}\,(x - X(t))^k\right) = 0;$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(B_k' - (k+1)\left(A_0 + \frac{1}{2}B_0\right) B_{k+1}\right)(x - X(t))^k +$$
$$+ \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{l=0}^{k} (l+1)\,(A_{k-l} + B_{k-l})\, B_{l+1}\right)(x - X(t))^k +$$
$$+ \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{l=0}^{k} (l+1)\, B_{k-l}A_{l+1}\right)(x - X(t))^k = 0;$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(\begin{array}{c} B_k' - (k+1)\left(A_0 + \frac{1}{2}B_0\right) B_{k+1} + \\ + \sum_{l=0}^{k} (l+1)\left(A_{k-l} + B_{k-l}\right) B_{l+1} + \\ + \sum_{l=0}^{k} (l+1)\, B_{k-l} A_{l+1} \end{array}\right) (x - X(t))^k = 0.$$

Por tanto, la ecuación para la función incógnita B_k es:

$$\left(\begin{array}{c} B_k' - (k+1)\left(A_0 + \frac{1}{2}B_0\right) B_{k+1} + \\ + \sum_{l=0}^{k} (l+1)\left(A_{k-l} + B_{k-l}\right) B_{l+1} + \\ + \sum_{l=0}^{k} (l+1)\, B_{k-l} A_{l+1} \end{array}\right) = 0;$$

o sea

$$\begin{array}{c} B_k' = (k+1)\left(A_0 + \frac{1}{2}B_0\right) B_{k+1} - \\ - \sum_{l=0}^{k} (l+1)\left(A_{k-l}B_{l+1} + B_{k-l}A_{l+1} + B_{k-l}B_{l+1}\right) \end{array}.$$

En conclusión, la cadena de Hugoniot Maslov para una solución singular del tipo "**onda de choque**" (2.3) es el sistema de infinitas ecuaciones diferenciales ordinarias

$$\left\{\begin{array}{c} X' = A_0 + \frac{1}{2}B_0; \\ A_k' = (k+1)\left(A_0 + \frac{1}{2}B_0\right) A_{k+1} - \\ - \left(\sum_{l=0}^{k} (l+1)\, A_{k-l} A_{l+1}.\right); \\ B_k' = (k+1)\left(A_0 + \frac{1}{2}B_0\right) B_{k+1} - \\ - \sum_{l=0}^{k} (l+1)\left(A_{k-l}B_{l+1} + B_{k-l}B_{l+1} + B_{k-l}A_{l+1}\right), \end{array}\right. \quad \text{donde } k = 0,1,2,3,... \tag{3.9}$$

Vemos que este sistema es en verdad una "cadena", ya que en cada sistema truncado siempre hay funciones incógnitas de subíndices superiores (el sistema truncado resulta así indeterminado).

Por ejemplo, en el caso de que queramos truncar la cadena para $k = 2$, entonces obtenemos el sistema de siete ecuaciones diferenciales ordinarias

$$\begin{cases} X' = A_0 + \frac{1}{2}B_0; \\ A_0' = \left(A_0 + \frac{1}{2}B_0 \right) A_1 - A_0 \; A_1.; \\ A_1' = 2\left(A_0 + \frac{1}{2}B_0 \right) A_2 - \; A_1^2 - 2A_0A_2; \\ A_2' = 3\left(A_0 + \frac{1}{2}B_0 \right) A_3 - \; A_2A_1. - 2A_3A_2 - 3A_0A_3; \\ B_0' = \left(A_0 + \frac{1}{2}B_0 \right) B_1 - (A_0B_1 + B_0B_1 + B_0A_1)\,; \\ B_1' = 2\left(A_0 + \frac{1}{2}B_0 \right) B_2 - \; \left(A_1B_1 + B_1^2 \; + B_1A_1\right) - 2\left(A_2B_2 + B_0B_2 + B_0A_2\right); \\ B_2' = 3\left(A_0 + \frac{1}{2}B_0 \right) B_3 - \; (A_2B_1 + B_2B_1 + B_2A_1) - \\ -2\left(A_1B_2 + B_1B_2 + B_1A_2\right) - 3\left(A_0B_3 + B_0B_3 + B_0A_3\right); \end{cases}$$

$$\begin{cases} X' = A_0 + \frac{1}{2}B_0; \\ A_0' = \frac{1}{2}B_0A_1; \\ A_1' = \; B_0A_2 - \; A_1^2; \\ A_2' = \frac{3}{2}B_0A_3 - \; A_2A_1. - 2A_3A_2 \; ; \\ B_0' = \; -\frac{1}{2}B_0B_1 \; - B_0A_1; \\ B_1' = 2 \; A_0B_2 - \; 2A_1B_1 - B_1^2 \; - 2A_2B_2 - B_0B_2 - 2B_0A_2; \\ B_2' = -\frac{3}{2}B_0B_3 - B_2B_1 - 3A_1B_2 - 2B_1B_2 - 3B_1A_2 - 3B_0A_3. \end{cases} \tag{3.10}$$

Este sistema es indeterminado, ya que en él aparecen las funciones incógnitas A_3 y B_3. Podemos "cerrar" este sistema truncado, igualando a 0 dichas variables, lo que se ha demostrado que no introduce errores demasiado grandes en el cálculo aproximado de la solución. (Al respecto ver el trabajo de Prasad y Ravindran, así como los comentarios de Dobrokhotov al respecto de este procedimiento tan sencillo).

Hecho lo dicho anteriormente, el sistema truncado queda reducido al siguiente sistema de 7 ecuaciones diferenciales ordinarias con 7 funciones incógnitas: $X, A_0, A_1, A_2, B_0, B_1$ y B_2 :

$$\begin{cases} X' = A_0 + \frac{1}{2}B_0; \\ A_0' = \frac{1}{2}B_0A_1; \\ A_1' = B_0A_2 - A_1^2; \\ A_2' = -A_2A_1; \\ B_0' = -\frac{1}{2}B_0B_1 - B_0A_1; \\ B_1' = 2A_0B_2 - 2A_1B_1 - B_1^2 - 2A_2B_2 - B_0B_2 - 2B_0A_2; \\ B_2' = -B_2B_1 - 3A_1B_2 - 2B_1B_2 - 3B_1A_2. \end{cases} \tag{3.11}$$

Para determinar una solución del sistema truncado, es necesario dar una condición inicial, dar los valores de las funciones $X, A_0, A_1, A_2, B_0, B_1$ y B_2 para $t_0 = 0$. Es natural poner $X(0) = 0$, ya que la singularidad inicial está en ese punto del eje x. Por otra parte, usando los coeficientes de la fórmula de Taylor para las funciones A y B hasta $k = 2$ se consigue dar los valores de las funciones A_0, A_1, A_2, B_0, B_1 y B_2 para $t_0 = 0$, teniendo en cuenta que

$u(0,x) = A(0,x) + B(0,x)H(x - X(0)) = A(0,x) + B(0,x)H(x - X(0))$,
o sea,

$u(0,x) = A(0,x) + B(0,x)H(x)$.

Recordando que
$u(t,x) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k(t)(x - X(t))^k + \left(\sum_{k=0}^{\infty} B_k(t)(x - X(t))^k\right).H(x - X(t))$
(1.3),

el sistema truncado permite construir una aproximación de esta función generalizada que tiene la forma

$$u_2(t,x) = \sum_{k=0}^{2} A_k(t)(x - X(t))^k + \left(\sum_{k=0}^{2} B_k(t)(x - X(t))^k\right).H(x - X(t)).$$

Esto nos permite escribir los valores iniciales de esas funciones en la forma

$$\begin{cases} A_0(0) = A(0,0); \\ A_1(0) = A_x(0,0); \\ A_2(0) = \frac{1}{2}A_{xx}(0,0); \\ B_0(0) = B(0,0): \\ B_1(0) = B_x(0,0); \\ B_2(0) = \frac{1}{2}B_{xx}(0,0). \end{cases} \tag{3.12}$$

Ahora se puede utilizar, por ejemplo, algún resolutor de ecuaciones diferenciales ordinarias como el Matlab, para encontrar la solución del sistema truncado correspondiente a estos valores iniciales y el gráfico aproximado de la función generalizada propuesta.

Ejemplo.

Resolvamos por este método el conocido **problema de Riemann** para la ecuación de Burguers

$$u_t + u.u_x = 0. \qquad (3.1)$$

Este problema consiste en hallar la solución de la ecuación (3.1) que satisfaga la condición inicial

$$u(0,x) = \begin{cases} u_l, x < 0; \\ u_r, x \geqslant 0, \end{cases}$$

donde u_l y u_r son números reales prefijados $(u_l \neq u_r)$.

Esta condición inicial se puede escribir en la forma

$$u(0,x) = u_l + (u_r - u_l) H(x),$$

donde $H(x) \in G_S(\mathbb{R})$ es alguna función generalizada de Heaviside.

La solución buscada tiene la forma

$$u(t,x) = A(t,x) + B(t,x) H(x - X(t)),$$

que tiene un desarrollo asintótico formal del tipo (1.3), y la correspondiente cadena de Hugoniot-Máslov es el sistema infinito de ecuaciones diferenciales ordinarias(3.7). El sistema truncado para $k = 2$ que corresponde a este caso, como hemos visto anteriormente, es

$$\left\{ \begin{array}{c} X' = A_0 + \frac{1}{2}B_0; \\ A_0' = \frac{1}{2}B_0A_1; \\ A_1' = B_0A_2 - A_1^2; \\ A_2' = -A_2A_1; \\ B_0' = -\frac{1}{2}B_0B_1 - B_0A_1; \\ B_1' = 2A_0B_2 - 2A_1B_1 - B_1^2 - 2A_2B_2 - B_0B_2 - 2B_0A_2; \\ B_2' = -B_2B_1 - B_2A_1 - 2A_1B_2 - 2B_1B_2 - 3B_1A_2. \end{array} \right. \qquad (3.11)$$

Tenemos que, en virtud de (3.9) los valores iniciales para este sistema son

$$\begin{cases} X(0) = 0 \\ A_0(0) = u_l; \\ A_1(0) = 0; \\ A_2(0) = 0; \\ B_0(0) = u_r - u_l; \\ B_1(0) = 0; \\ B_2(0) = 0 \end{cases}$$

Como $A_0(t) = u_l$ y $B_0(t) = u_r - u_l$, para todo $t \in \mathbb{R}$, la curva de los puntos singulares está dada por la ecuación

$$X'(t) = A_0 + \frac{1}{2}B_0 = u_l + \frac{1}{2}(u_r - u_l) = \frac{1}{2}(u_l + u_r).$$

Encontramos así que la singularidad se desplaza con velocidad constante, igual a $c = \frac{1}{2}(u_l + u_r)$ a lo largo de una recta que tiene por ecuacion $X(t) = \frac{1}{2}(u_l + u_r)t, t \in \mathbb{R}$.

La función generalizada que se obtenga resolviendo el sistema truncado es una aproximación de la solución débil **problema de Riemann para la ecuación de Burguers** (que es como se llama el problema de Cauchy cuando la condición inicial propueta es una función que presenta un salto en $t = 0$, como es en este caso)

$$\begin{cases} u(t,x) = u_l + (u_r - u_l) H\left(x - \frac{1}{2}(u_l + u_r)t\right), \\ -\infty < x < +\infty, -\infty < t < +\infty. \end{cases}$$

Este resultado se obtiene fácilmente utilizando el método de las características explicado en la primera conferencia, según el cual, como se recordará, para obtener la solución del problema de Cauchy para la ecuación de Burguers (3.1), correspondiente a la condición inicial $u(0,x) = u_0(x)$, se debe definir el valor de la solución en un punto cualquiera (t,x) del plano $\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_x$ mediante la fórmula $u(t.x) = u_0(\xi)$, donde $(0,\xi)$ es el punto del eje $\mathbb{R}_x$ por donde pasa la proyección de la característica que pasa por el punto (t,x). Esto se basa en el hecho de que las características de la ecuación de Burguers son líneas rectas, sobre cada una de cuyas proyecciones la solución toma un valor constante.

Al respecto se debe notar que, en el caso $u_l > u_r$, la familia de las proyecciones de las rectas características de la ecuación sobre el plano $\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_x$ se intersecan sobre el ángulo $\{(t,x) : u_r t < x < u_l t, t \geqslant 0\}$, lo cual significa que sobre esa parte del plano habría la posibilidad de definir una solución bivaluada. Por el contrario, en el caso $u_l < u_r$, sobre el ángulo $\{(t,x) : u_l t < x < u_r t, t \geqslant 0\}$ no se proyecta ninguna característica de la ecuación. En ese caso sobre dicha región del plano tenemos completa libertad para definir el valor de la solución $u(t,x)$, por consiguiente además de la solución propuesta por el procedimiento anteriormente descrito, existe un conjunto infinito de soluciones débiles del problema de Cauchy anteriormente planteado. Otra solución del mismo problema, que es estable en presencia de perturbaciones, es la llamada **onda de rarefacción** definida mediante la fórmula

$$u(t,x)=\begin{cases} u_l, x<u_lt; \\ \dfrac{x}{t}, u_lt\leqslant x\leqslant u_rt, \\ u_r, x>u_rt\end{cases}, \forall t\geqslant 0.$$

Fundamentación de la cadena de Hugoniot-Máslov para una onda de choque.

Antes hemos obtenido la cadena de Hugoniot-Máslov para una onda de choque de la ecuación de Burguers (3.1) bajo la condicón de que una solución del sistema de ecuaciones en derivadas parciales

$$\begin{cases}\mathbf{A}(t,x)=0; \\ \mathbf{B}(t,x)=0; \\ \mathbf{C}(t,x)=0,\end{cases} \qquad (3.4)$$

satisfaría con mayor razón la relación de asociación

$\mathbf{A}(t,x)+\mathbf{B}(t,x)H(\tau)+\mathbf{C}(t,x)\delta(\tau)\sim 0,$

donde $\tau=x-X(t)$ y $X(t)$ denota a los puntos singulares de la solución singular propuesta.

Como se recordará, las expresiones $\mathbf{A}(t,x), \mathbf{B}(t,x)$ y $\mathbf{C}(t,x)$ fueron obtenidas después de utilizar las relaciones de asociación $H^2\sim H$ y $H\delta\sim\frac{1}{2}\delta$ (donde δ es la función generalizada de Dirac que cumple la condición $H'=\delta$) y habiendo agrupado los términos semejantes a las funciones generalizadas $1, H(\tau)$ y $\delta(\tau)$. Todo esto parecería sugerir que la independencia lineal de estas funciones generalizadas en el espacio vectorial real subyacente al álgebra debiera ser una condición necesaria para el cumplimiento de las igualdades (3.4).

Sin embargo, Panters Rodríguez Bermúdez logró demostrar (como un resultado auxiliar de su tesis de maestría en ciencias matemáticas, realizada en La Habana en 2005), lo que constituye una condición necesaria para las ecuaciones (3.4) que descarta la independencia lineal de las funciones generalizadas $1, H(\tau)$ y $\delta(\tau)$, si bien esa condición permite obtener con toda facilidad la cadena de Hugoniot-Máslov de una onda de choque. Por la importancia de este resultado en sí misma (al margen de la circunstancia que lo provocó en su momento) propuse denominar a dicho teorema la **fundamentación teórica de las cadenas de Hugoniot-Máslov para ondas de choque.** El teorema establece lo siguiente:

Teorema sobre la fundamentación de las cadenas de Hugoniot-Máslov para una onda de choque en una ley de conservación escalar.

Si $\mathbf{A}(t,x), \mathbf{B}(t,x)$ y $\mathbf{C}(t,x)$ son funciones de la clase C^∞ sobre el plano $\mathbb{R}_t\times\mathbb{R}_x$, tales que en el álgebra de Colombeau $G_S(\mathbb{R})$ se cumpla la relación de asociación

$\mathbf{A}(t,x)+\mathbf{B}(t,x)H(\tau)+\mathbf{C}(t,x)\delta(\tau)\sim 0, \quad (3.3)$

donde $\tau = x - X(t)$ y $H \in G_S(\mathbb{R})$ es una función generalizada de Heaviside y $\delta \in G_S(\mathbb{R})$ es la función generalizada de Dirac tal que $H' = \delta$, y si se proponen los desarrollos asintóticos formales de esas funciones alrededor de los puntos singulares $x = X(t)$

$$\mathbf{A}(t,x) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{A}_k(t)(x - X(t))^k;$$

$$\mathbf{B}(t,x) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{B}_k(t)(x - X(t))^k;$$

$$\mathbf{C}(t,x) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{C}_k(t)(x - X(t))^k,$$

entonces para que se satisfaga la relación de asociación (3.3) es **condición necesaria** que se cumpla

$\mathbf{A}_k(t) = 0, \mathbf{B}_k(t)$, para todo $k = 0, 1, 2, 3, ...$ y $\mathbf{C}_0(t) = 0$, para todo $t \in \mathbb{R}$.

La demostración completa y rigurosa de este teorema aparece en el artículo "Hugoniot–Maslov chains of a shock wave in conservation law with polynomial flow", de Panters Rodríguez Bermúdez y Baldomero Valiño Alonso, publicado en la revista Mathematische Nachrinten 280, No. 8, páginas 907 – 915, del año 2007.

El teorema fundamenta de hecho que el único sistema infinito de ecuaciones diferenciales ordinarias cuyas soluciones son los coeficientes del desarrollo asintótico formal de la función generalizada propuesta y la función cuyos valores son los puntos singulares de dicha función generalizada, es el sistema que aquí hemos llamado **cadena de Hugoniot-Máslov** y por consiguiente garantiza la unicidad, hasta cierto punto, de la función generalizada que debe satisfacer la relación de asociación (3.3). Este resultado confiere una gran confiabilidad a las aproximaciones de dicha solución generalizada que se puedan obtener mediante el truncamiento de dicha cadena.

4. OBTENCIÓN DE LA CADENA DE HUGONIOT-MÁSLOV DE UN SOLITÓN MICROSCÓPICO GENERALIZADO DE LA ECUACIÓN DE BURGUERS.

En el caso de los solitones infinitamente estrechos no podemos exhibir un resultado tan ventajoso, sin embargo, el cálculo de la cadena de Hugoniot-Máslov facilitará igualmente la determinación aproximada de las soluciones de ese tipo.

Fue Máslov el primero en advertir que los solitones infinitamente estrechos aparecen en la ecuación de Burguers (3.1) como casos límites de soluciones de la ecuación de Korteveg De Vries, al respecto presentó el siguiente ejemplo: la ecuación de KdV con una pequeña dispersion h, que presenta la forma

$$u_t + u.u_x + hu_{xxx} = 0 \qquad (4.1)$$

posee una solución de la forma

$$u(t,x) = A + B\cosh^{-2}\left(\frac{C(x - Vt)}{h}\right), \qquad (4.2)$$

donde A, B, C y V son constantes.

Cuando $h \to 0$, esta solución converge a una función de la forma

$u_1(t,x) = \begin{cases} A, \forall x \neq Vt; \\ A + B, x = Vt. \end{cases}$,

que resulta por tanto ser una solución singular de la ecuación de Burguers (3.1) . Máslov la denominó **"solitón infinitamente estrecho".** Este ejemplo nos autoriza a pensar que en la ecuación de B urguers pueden existir otras soluciones similares, por consiguiente vale la pena plantearse el problema de la obtención de la cadena de Hugoniot-Máslov para una solución de ese tipo, lo cual nos posibilita su cálculo aproximado y pudiera tener importantes aplicaciones (por ejemplo, en la dinámica costera cuando se analiza la aproximación de olas de tipo **tsunami** esta puede ser una herramienta importante).

Nosotros utilizaremos para este fin las funciones generalizadas que Colombeau propuso denominar **solitones microscópicos generalizados,** los cuales fueron mencionados con dicho nombre en el trabajo de Amaury Álvarez, Alex Méril y Baldomero Valiño Alonso, "Step Soliton Generalized Solutions of the Shallow Water Equations", publicado en 2012 en la revista Journal of Applied Mathematics, Volume 2012, Article ID 910659, 24 páginas.

Consideremos nuevamente la ecuación de Burguers

$$u_t + u.u_x = 0 \qquad (3.1)$$

y propongamos la búsqueda de una función generalizada de la forma

$$u(t,x) = A(t,x) + B(t,x)\,\delta_1(x - X(t)) \qquad (4.1)$$

tal que se cumpla la relación de asociación

$$u_t + u.u_x \sim 0 \qquad (3.2)$$

siendo $A : \mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_x \to \mathbb{R}$ y $B : \mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_x \to \mathbb{R}$ funciones de la clase C^∞, la segunda de ellas nunca nula en el plano $\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_x$ y $\delta_1 \in G_S(\mathbb{R})$ un solitón microscópico generalizado.

Sustituyamos la expresión (4.1) en el primer miembro de la ecuación de Burguers, para lo cual necesitamos calcular las derivadas parciales

$$\begin{cases} u_t(t,x) = A_t(t,x) + B_t(t,x)\,\delta_1(x - X(t)) - X'(t)\,B(t,x)\,\delta_1'(x - X(t)) \\ u_x(t,x) = A_x(t,x) + B_x(t,x)\,\delta_1(x - X(t)) + B(t,x)\,\delta_1'(x - X(t)) \end{cases}$$
(4.2) .

Remplazando las fórmulas (4.2) en el primer miembro de (3.1) obtenemos

$$u_t + u.u_x = \left(A_t + B_t\ \delta_1(\tau) - X'\ B\ \delta_1'(\tau)\right) + \left(A + B\delta_1(\tau)\right)\left(A_x + B_x\delta_1(\tau) + B\delta_1'(\tau)\right) =$$
$$= \left(A_t + B_t\ \delta_1(\tau) - X'\ B\ \delta_1'(\tau)\right) + \begin{pmatrix} A.A_x + A.B_x\delta_1(\tau) + A.B\delta_1'(\tau) + \\ + A_x.B\delta_1(\tau) + B.B_x\delta_1^2(\tau) + B^2\delta_1(\tau)\,\delta_1'(\tau) \end{pmatrix}$$

donde, para abreviar, hemos omitido los argumentos t, x t hemos denotado la diferencia $x - X(t)$ por la variable τ.

Fácilmente se demuestra que
$\delta_1^2 \sim \delta_1$ (4.3)
y además, notando que $\left(\delta_1^2\right)' = 2\delta_1\delta_1'$, deducimos la relación de asociación

$$\delta_1\delta_1' \sim \frac{1}{2}\delta_1' \qquad (4.4).$$

Teniendo en cuenta las relaciones (4.3) y (4.4), la expresión resultante de la sustitución de (4.1) en el primer miembro de la ecuación (3.1) está asociada con la expresión

$$\left(A_t + B_t\ \delta_1(\tau) - X'\ B\ \delta_1'(\tau)\right) + \begin{pmatrix} A.A_x + A.B_x\delta_1(\tau) + A.B\delta_1'(\tau) + \\ +A_x.B\delta_1(\tau) + B.B_x\delta_1(\tau) + \frac{1}{2}B^2\delta_1'(\tau) \end{pmatrix}.$$

Por consiguiente, lo que necesitamos es encontrar una función generalizada del tipo (4.1) tal que se cumpla la siguiente relación de asociación

$$(A_t + A.A_x) + (B_t + A.B_x + A_x.B + B.B_x)\,\delta_1(\tau) + \left(-X'\ B + A.B + \frac{1}{2}B^2\right)\delta_1'(\tau) \sim 0. \qquad (4.5)$$

Por consiguiente, si $A(t.x)$ y $B(t, x)$ son soluciones del sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{cases} A_t + A.A_x = 0; \\ B_t + A.B_x + A_x.B + B.B_x = 0; \\ -X'\ B + A.B + \frac{1}{2}B^2 = 0 \end{cases} \qquad (4.6),$$

entonces la función generalizada (4.1) debe satisfacer la relación de asociación (4.5).

Note que las ecuaciones (4.6) son formalmente idénticas a las ecuaciones (3.6) que fueron obtenidas al remplazar en el primer miembro de la ecuación de Burguers la onda de choque que tiene por ecuación $u(t, x) = A(t, x) + B(t, x)\,H(x - X(t))$, y es claro que así sea porque en aquel caso se utilizaron relaciones de asociación de las funciones genealizadas δ_1 y δ_1' que son formalmente idénticas a las relaciones de asociación que verifican H y δ.

Por consiguiente, como en el caso anterior, obtenemos que la función A debe ser una solución de la ecuación de Burguers, y para la trayectoria de la singularidad obtenemos la ecuación

$$-X'\ B + A.B + \frac{1}{2}B^2 = 0,$$

o bien, puesto que la función B debe ser nunca nula en $\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_x$, la ecuación diferencial ordinaria equivalente

$$-X' \, \frac{B}{B} + \frac{A.B}{B} + \frac{1}{2}\frac{B^2}{B} = 0,$$

o sea,

$$X' \;= A + \frac{1}{2}B.$$

Esto nos permite afirmar que la cadena de Hugoniot-Máslov es exactamente la misma que para el caso de la onda de choque, que escribiremos en la forma

$$\left\{\begin{array}{c} X' = A_0 + \frac{1}{2}B_0; \\ A_k' = (k+1)\left(A_0 + \frac{1}{2}B_0\right) A_{k+1} - \\ -\left(\sum_{l=0}^{k} (l+1)\, A_{k-l}A_{l+1}.\right); \\ B_k' = (k+1)\left(A_0 + \frac{1}{2}B_0\right) B_{k+1} - \\ -\sum_{l=0}^{k} (l+1)\left(A_{k-l}B_{l+1} + B_{k-l}B_{l+1} + B_{k-l}A_{l+1}\right), \end{array}\right. \qquad \text{donde } k = 0,1,2,3,...\,(3.9)\,.$$

Análogamente, también será idéntico el sistema truncado que se obtiene a partir de la cadena para el valor de $k = 2$:

$$\left\{\begin{array}{c} X' = A_0 + \frac{1}{2}B_0; \\ A_0' = \frac{1}{2}B_0A_1; \\ A_1' = \; B_0A_2 - \; A_1^2; \\ A_2' = \frac{3}{2}B_0A_3 - \; A_2A_1. - 2A_3A_2 \;; \\ B_0' = \; -\frac{1}{2}B_0B_1 \; - B_0A_1; \\ B_1' = 2\; A_0B_2 - \; 2A_1B_1 - B_1^2 \; - 2A_2B_2 - B_0B_2 - 2B_0A_2; \\ B_2' = -\frac{3}{2}B_0B_3 - B_2B_1 - B_2A_1 - 2A_1B_2 - 2B_1B_2 - 3B_1A_2 - 3B_0A_3. \end{array}\right. \tag{3.10}$$

De manera que haciendo $A_3 = 0, B_3 = 0$ obtenemos el mismo sistema cerrado truncado que habíamos obtenido anteriormente:

$$\begin{cases} X' = A_0 + \frac{1}{2}B_0; \\ A_0' = \frac{1}{2}B_0A_1; \\ A_1' = B_0A_2 - A_1^2; \\ A_2' = -A_2A_1; \\ B_0' = -\frac{1}{2}B_0B_1 - B_0A_1; \\ B_1' = 2A_0B_2 - 2A_1B_1 - B_1^2 - 2A_2B_2 - B_0B_2 - 2B_0A_2; \\ B_2' = -B_2B_1 - B_2A_1 - 2A_1B_2 - 2B_1B_2 - 3B_1A_2. \end{cases} \tag{3.11}$$

Este sistema puede ser utilizado para el cálculo aproximado de un solitón infinitamente estrecho para la ecuación de Burguers, siempre que se propongan las condiciones iniciales para $t = 0$, las cuales se darán de la misma manera que en el caso de una onda de choque para la misma ecuación:

$$\begin{cases} A_0(0) = A(0,0); \\ A_1(0) = A_x(0,0); \\ A_2(0) = \frac{1}{2}A_{xx}(0,0); \\ B_0(0) = B(0,0): \\ B_1(0) = B_x(0,0); \\ B_2(0) = \frac{1}{2}B_{xx}(0,0). \end{cases} \tag{3.12}$$

Ejemplo.

Supongamos que para la ecuación de Burguers (3.1) se plantea el problema de Riemann con la condición inicial

$$u(0,x) = A + B\delta_1(x),$$

donde A y B son constantes reales cualesquiera, $B \neq 0$, y $\delta_1(x) \in G_S(\mathbb{R})$ es un solitón microscópico generalizado que tiene por expresión

$\delta_1(x) = -1 + H(x) + H(-x),$

donde $H \in G_S(\mathbb{R})$ es una función generalizada de Heaviside.

Entonces la solución generalizada de la ecuación de Burguers que obtenemos por esta vía tiene la forma

$$u(t,x) = A + B\delta_1(x - X(t)),$$

donde $X(t) = \left(A + \frac{1}{2}B\right)t, \forall t \in \mathbb{R}$. Esto significa que el solitón infinitamente estrecho se desplaza a lo largo de una recta con una celeridad igual a $c = A + \frac{1}{2}B$ (donde A y B son las constantes prefijadas.

A diferencia del caso de la onda de choque, no podemos afirmar que este sea el único solitón infinitamente estrecho que corresponde a la condición inicial impuesta para la ecuación de Burguers, ya que toda función generalizada de la forma

$$u\,(t,x) = A + B\delta_1\,(x - X\,(t))\,,$$

donde $X = ct$, $\forall t \in \mathbb{R}$, donde c es una constante arbitraria, obviamente satisface también la ecuación de Burguers en calidad de solución débil o generalizada (pues en efecto, fuera de la recta $X = ct$ la ecuación queda satisfecha por la función constante $u(t,x) = A$.

Ejercicios.

1) Utilice algún resolutor de ecuaciones diferenciales ordinarias de MATLAB para obtener gráficamente un solitón infinitamente estrecho para la ecuación de Burguers que satisfaga la condición inicial
$u(0,x) = 2 + 4\delta_1\,(x)\,.$

2) Obtenga una solución aproximada del siguiente problema de Riemann para la ecuación de Burguers

$$\begin{cases} u_t + u.u_x = 0; \\ u\,(0,x) = \left(x^2+1\right) + \left(x^2-1\right)\delta_1\,(x)\,, \end{cases} \tag{4.8}$$

donde $\delta_1\,(x) \in G_S\,(\mathbb{R})$ es un solitón microscópico generalizado arbitrario.